# MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**Estatística**

CURSO DE ESTATÍSTICA
J. Simon da Fonseca e G. de Andrade Martins

ELEMENTOS DE PROBABILIDADE E INFERÊNCIA
Reny Reis Gattás

ESTATÍSTICA APLICADA
J. S. da Fonseca, G. A. Martins e G. L. Toledo

ESTATÍSTICA BÁSICA
G. L. Toledo e I. I. Ovalle

ESTATÍSTICA DESCRITIVA
Fernando A. Gonçalves

**Matemática**

CÁLCULO NUMÉRICO BÁSICO
Rui J. A. Campos

ELEMENTOS DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS
Caroline Dinwiddy

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA
Ruy Donini Antunes

MATEMÁTICA PARA OS CURSOS DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CIÊNCIAS CONTÁBEIS — 2 volumes
Sebastião, Élio e Ermes Medeiros da Silva

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS
Taro Yamane

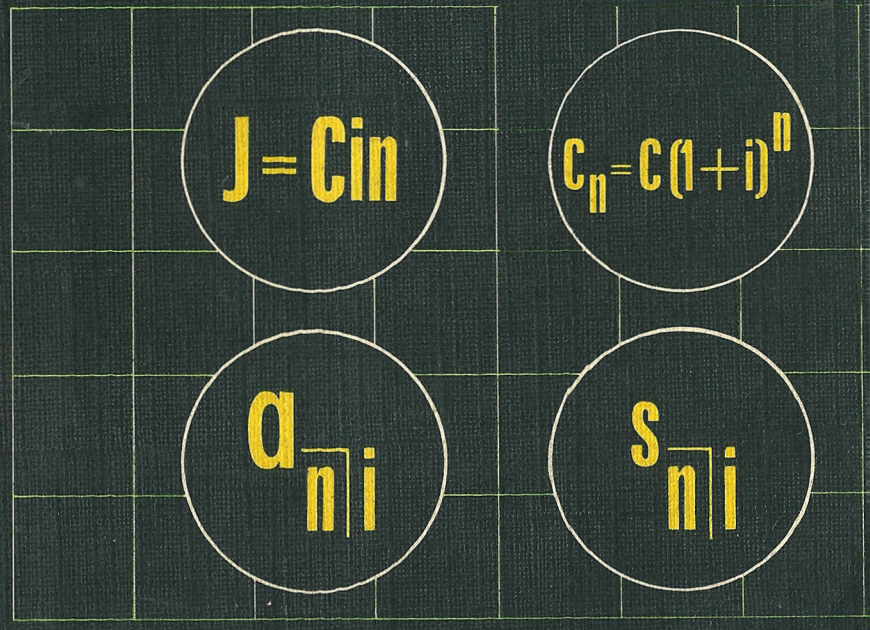
MATEMÁTICA FINANCEIRA
Walter De Francisco

PUBLICAÇÕES DA EDITORA ATLAS S.A.

WASHINGTON FRANCO MATHIAS
JOSÉ MARIA GOMES

# matemática financeira

## com + de 600 exercícios resolvidos e propostos




ATLAS

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Washington Franco Mathias
José Maria Gomes

Este texto de **Matemática Financeira** diferencia-se dos atualmente disponíveis por reunir uma série de características positivas.

Entre estas, destacam-se sua operacionalidade e seu conseqüente teor prático, expresso em cada capítulo, não só pela forma direta e concisa com que a matéria é apresentada, como pelo elevado número de exercícios propostos e resolvidos (mais de 600), através dos quais se tornam possíveis a revisão e a aplicação da matéria estudada.

Outra característica desta obra é a seqüenciação com que a matéria é apresentada. Os autores organizaram um roteiro completo para o estudo da Matemática Financeira, indo desde os mais elementares cálculos de juros simples até os mais complexos exercícios — como, por exemplo, os referentes aos sistemas de amortizações variáveis. O crescente grau de complexidade de cada capítulo, entretanto, pode ser apreendido com facilidade, dada a solidez com que foi apresentado cada um dos conceitos e aplicações anteriores.

De outro lado, esta obra ainda contém problemas de ocorrência menos freqüente e de mais complexa fundamentação teórica. Para esses casos, os autores acrescentaram quatro apêndices, que podem ser utilizados em cursos de maior extensão ou por profissionais que eventualmente se defrontam com a necessidade prática de efetuar os cálculos ali expostos e analisados.

*(Continua na orelha posterior)*

WASHINGTON FRANCO MATHIAS
JOSÉ MARIA GOMES

# Matemática Financeira

EDITORA ATLAS S.A.

MATEMÁTICA FINANCEIRA
Washington Franco Mathias
José Maria Gomes

Capa, diagramação e coordenação gráfica de
PAVEL GERENCER

Copyright © 1982
EDITORA ATLAS S. A.

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – Nos termos da Lei que resguarda os direitos autorais, é proibida a reprodução total ou parcial, bem como a produção de apostilas a partir deste livro, de qualquer forma ou por qualquer meio – eletrônico ou mecânico, inclusive através de processos xerográficos, de fotocópia e de gravação – sem permissão, por escrito, do Editor.

1.ª EDIÇÃO
7.ª tiragem — 1982

Impresso no Brasil
*Printed in Brazil*

Aos nossos pais

Benedito F. Mathias (in memoriam)
Efigênia L. Franco

Jorge F. Gomes
Mariana R. Gomes

1989

# Sumário


Prefácio dos autores . . . . . 11

**PARTE I – JUROS SIMPLES** . . . . . 13

1. Juro e montante . . . . . 13
   1. Introdução . . . . . 13
   2. Definições . . . . . 15
      2.1. Taxa de juros . . . . . 15
         2.1.1. Forma porcentual . . . . . 15
         2.1.2. Forma unitária . . . . . 16
      2.2. Diagramas de capital no tempo . . . . . 17
   3. Cálculo do juro . . . . . 18
   4. Montante . . . . . 21
   5. Taxa proporcional . . . . . 22
   6. Taxa equivalente . . . . . 26
   7. Períodos não-inteiros . . . . . 27
   8. Juro exato e juro comercial . . . . . 28
      8.1. Juro exato . . . . . 29
      8.2. Juro comercial . . . . . 30
   9. Valor atual e valor nominal . . . . . 30
   10. Exercícios resolvidos . . . . . 32
   11. Exercícios propostos . . . . . 50

2. Descontos . . . . . 53
   1. Desconto racional ou desconto "por dentro" . . . . . 53
   2. Desconto comercial ou desconto "por fora" . . . . . 56
      2.1. Desconto bancário . . . . . 58
   3. Taxa de juros efetiva . . . . . 60
   4. Relação entre desconto racional e comercial . . . . . 64
   5. Exercícios resolvidos . . . . . 65
   6. Exercícios propostos . . . . . 87

3. Equivalência de capitais . . . . . 91
   1. Definições . . . . . 91
      1.1. Data focal . . . . . 91
      1.2. Equação de valor . . . . . 93

2. Capitais equivalentes . . . . . 95
2.1. Equivalência de capitais com desconto por dentro ou racional . . . . . 96
2.2. Equivalência de capitais com desconto por fora ou comercial . . . . . 97
3. Conjuntos equivalentes de capitais . . . . . 99
3.1. Conjuntos equivalentes de capitais com desconto racional ou por dentro . . 99
3.2. Conjuntos equivalentes de capitais com desconto comercial ou por fora . . . 100
4. Exercícios resolvidos . . . . . 102
5. Exercícios propostos . . . . . 117

PARTE II – JUROS COMPOSTOS . . . . . 120

4. Juro e montante . . . . . 120
1. Diferença entre os regimes de capitalização . . . . . 120
2. Montante . . . . . 121
3. Cálculo do juro . . . . . 123
4. Valor atual e valor nominal . . . . . 124
5. Taxas equivalentes . . . . . 127
6. Períodos não-inteiros . . . . . 130
6.1. Convenção linear . . . . . 130
6.2. Convenção exponencial . . . . . 132
6.3. Comparação entre a convenção linear e a exponencial . . . . . 134
7. Taxa efetiva e taxa nominal – Quando o período de capitalização não coincide com o período da taxa . . . . . 136
8. Exercícios resolvidos . . . . . 140
9. Exercícios propostos . . . . . 167

Apêndice . . . . . 173
1. Taxas equivalentes em períodos quaisquer . . . . . 173
2. Potenciação a expoentes fracionários . . . . . 175
3. Capitalização contínua . . . . . 178
3.1. Cálculo do montante em capitalização contínua . . . . . 179
3.2. Taxa efetiva em capitalização contínua . . . . . 183
3.3. O número "e" . . . . . 185

5. Descontos . . . . . 186
1. Desconto racional . . . . . 186
2. Exercícios resolvidos . . . . . 189
3. Exercícios propostos . . . . . 192

Apêndice . . . . . 194
1. Observações sobre o desconto racional . . . . . 194
2. Desconto comercial . . . . . 195
2.1. Taxa efetiva e taxa nominal . . . . . 199
2.2. Desconto bancário . . . . . 201
3. Exercícios resolvidos . . . . . 201
4. Exercícios propostos . . . . . 206

6. Equivalência de capitais . . . . . 208
1. Equivalência com desconto racional . . . . . 208
2. Conjuntos equivalentes de capitais . . . . . 211
2.1. Conjuntos equivalentes de capitais com desconto racional composto . . . . . 211
3. Exercícios resolvidos . . . . . 213
4. Exercícios propostos . . . . . 225

Apêndice . . . . . 227
1. Equivalência de capitais em datas quaisquer sob o critério de desconto racional composto . . . . . 227
2. Equivalência de capitais com desconto comercial . . . . . 229
3. Conjuntos equivalentes de capitais com desconto comercial . . . . . 233
4. Exercícios resolvidos . . . . . 234
5. Exercícios propostos . . . . . 236

PARTE III – ANUIDADES E EMPRÉSTIMOS . . . . . 237

7. Rendas certas ou anuidades . . . . . 237
1. Definições . . . . . 238
2. Classificação das anuidades . . . . . 238
2.1. Quanto ao prazo . . . . . 238
2.2. Quanto ao valor dos termos . . . . . 238
2.3. Quanto à forma de pagamento ou de recebimento . . . . . 239
2.4. Quanto à periodicidade . . . . . 239
2.5. Quadro-resumo . . . . . 239
3. Modelo básico de anuidade . . . . . 239
3.1. Introdução . . . . . 239
3.2. Valor atual do modelo básico . . . . . 241
3.3. Montante do modelo básico . . . . . 250
3.4. Relação entre os fatores $a_{\overline{n}|i}$ e $S_{\overline{n}|i}$ . . . . . 253
4. Exercícios resolvidos . . . . . 254
5. Exercícios propostos . . . . . 286

Apêndice . . . . . 291
1. Relação adicional entre os fatores $a_{\overline{n}|i}$ e $S_{\overline{n}|i}$ . . . . . 291
2. Anuidades antecipadas . . . . . 291
2.1. Valor atual . . . . . 292
2.2. Montante . . . . . 292
3. Sistema ou tabela "Price" . . . . . 293

8. Modelos genéricos de anuidades . . . . . 295
1. Anuidades diferidas . . . . . 295
2. Anuidade em que o período dos termos não coincide com aquele a que se refere a taxa . . . . . 297
3. Anuidade com termos constantes, segundo o modelo básico, mais parcelas intermediárias iguais . . . . . 299
4. Anuidade composta por duas anuidades diferidas em seqüência . . . . . 301
5. Anuidades perpétuas . . . . . 303
6. Anuidades variáveis . . . . . 304
7. Exercícios resolvidos . . . . . 305
8. Exercícios propostos . . . . . 332

Apêndice . . . . . 336
1. Anuidades diferidas . . . . . 336
1.1. Anuidades diferidas postecipadas . . . . . 336
1.1.1. Valor atual . . . . . 336
1.1.2. Montante . . . . . 337
1.2. Anuidades diferidas antecipadas . . . . . 338
1.2.1. Valor atual . . . . . 338
1.2.2. Montante . . . . . 338
2. Anuidades perpétuas . . . . . 338
3. Anuidades variáveis . . . . . 340
4. Anuidade variável periódica e não periódica . . . . . 340

9. Empréstimos . . . . . 341
1. Definições . . . . . 342
2. Classificação das modalidades de amortização . . . . . 342
2.1. Sistema de amortização constante (SAC) . . . . . 344
2.1.1. SAC, com prazo de carência e prazo de utilização unitário . . . . . 345
2.1.2. SAC, com prazo de carência, juros capitalizados e prazo de utilização unitário . . . . . 346
2.1.3. SAC, com prazo de carência e prazo de utilização não-unitário . . . . 348
2.2. Sistema Francês (SF) . . . . . 349
2.2.1. SF, com prazo de utilização unitário e sem prazo de carência . . . . . 349
2.2.2. SF, com prazo de utilização unitário e com prazo de carência . . . . 350
2.2.3. SF, quando o período a que se refere a taxa de juros não coincide com o período a que se refere a amortização . . . . . 352

2.3. Sistema americano (SA) . . . . . 355
2.3.1. SA com devolução dos juros durante a carência . . . . . 355
2.3.2. SA com a capitalização dos juros . . . . . 356
2.3.3. "Sinking fund" . . . . . 356
2.4. Sistema de amortizações variáveis . . . . . 359
3. Custo efetivo de um empréstimo . . . . . 360
3.1. Taxa de retorno . . . . . 360
3.1.1. Cálculo de taxa de retorno quando os valores são uniformes . . . . . 360
3.1.2. Cálculo de taxa de retorno quando os valores não são uniformes . . . 362
4. Exercícios resolvidos . . . . . 366
5. Exercícios propostos . . . . . 398

**PARTE IV – INFLAÇÃO** . . . . . 407

10. Correção monetária e taxa de juros real . . . . . 407
1. Índice . . . . . 408
2. Correção monetária . . . . . 410
2.1. Histórico . . . . . 410
2.2. Comparação entre os índices de variação das ORTN, índice 2 e taxa cambial 411
3. Taxa de juros nominal e real . . . . . 413
3.1. Aplicações . . . . . 414
3.1.1. Curto/médio prazos . . . . . 414
3.1.2. Médio/longo prazos . . . . . 416
4. Exercícios resolvidos . . . . . 419
5. Exercícios propostos . . . . . 441
Apêndice . . . . . 448
1. Comparação entre alguns índices . . . . . 448

**PARTE V – TABELAS** . . . . . 450

Tabelas de contagem de dias . . . . . 450
Tabelas financeiras . . . . . 453
1. $(1 + i)^n$ = Montante de 1, à taxa $i$ pelo prazo $n$ . . . . . 453
1.1. Cálculo de montante e de valor atual . . . . . 453
1.2. Cálculo de $(1 + i)^n$ para períodos não constantes na tabela . . . . . 454
2. $(1 + i)^{1/k}$ – Taxas equivalentes . . . . . 455
3. $a_{\overline{n}|i}$ – Valor presente à taxa $i$ de $n$ anuidades unitárias, imediatas, postecipadas e periódicas . . . . . 456
3.1. Variações do fator $a_{\overline{n}|i}$ . . . . . 457
3.1.1. Variação na taxa de juros com $n$ constante . . . . . 458
3.1.2. Variação em $n$ com a taxa de juros constante . . . . . 458
4. $(a_{\overline{n}|i})^{-1}$ – Prestações constantes, imediatas, postecipadas e periódicas para o valor atual igual a 1, considerando-se a taxa de juros $i$ e $n$ prestações . . . . . 459
4.1. Variações do fator $(a_{\overline{n}|i})^{-1}$ . . . . . 460
4.1.1. Variação na taxa de juros com $n$ constante . . . . . 460
4.1.2. Variação em $n$ com a taxa de juros constante . . . . . 460
5. $S_{\overline{n}|i}$ – Montante à taxa $i$ de $n$ prestações unitárias, imediatas, postecipadas e periódicas . . . . . 461
5.1. Variação do fator $S_{\overline{n}|i}$ . . . . . 462
5.1.1. Variação a taxa de juros com $n$ constante . . . . . 462
5.1.2. Variação em $n$ com a taxa de juros constante . . . . . 463
Bibliografia . . . . . 485

# Prefácio dos Autores

Este livro é destinado sobretudo aos estudantes de curso superior das várias áreas que se dediquem ao aprendizado de Matemática Financeira. Entretanto, pode ser usado também por estudantes de nível médio com bom aproveitamento. Isto decorre do enfoque adotado no presente trabalho, que visa a uma interligação contínua entre a teoria e as aplicações, utilizando-se do ferramental matemático apenas o estritamente necessário.

A fixação dos conceitos financeiros é obtida através de um grande número de exercícios, sendo que, após cada capítulo, são resolvidos detalhadamente os problemas típicos correspondentes ao mesmo. A seguir, são apresentados os problemas propostos, acompanhados das respostas respectivas, de modo que o próprio aluno possa acompanhar com segurança a validade do raciocínio desenvolvido e a correção dos cálculos efetuados.

Esta ênfase, na parte prática, resultou da experiência didática dos autores ao longo de vários cursos ministrados, quer em faculdades, quer a profissionais que atuam na área financeira.

Os capítulos foram dispostos de modo a apresentar uma seqüência de conceitos lógica quanto ao assunto abordado e gradativa quanto à dificuldade de apreensão envolvida. Isto não impede o aluno, que tenha conhecimentos anteriores, de iniciar seu estudo em tópicos específicos. Neste sentido, o livro também se presta como material de consulta.

Na primeira parte, correspondendo aos três primeiros capítulos, são tratadas as operações em juros simples. É apresentada então a maior parte dos conceitos financeiros, que irão permear todos os demais capítulos, pois a simplicidade de raciocínio e de cálculo em juro simples facilita muito o aprendizado do raciocínio financeiro.

A segunda parte aborda o problema dos juros compostos e compreende os capítulos 4, 5 e 6. A única grande diferença, que esta parte apresenta com relação à anterior diz respeito ao regime de capitalização.

Os professores, que venham a utilizar este livro em cursos superiores, poderão começar diretamente por esta parte sem perda de continuidade, indicando os três primeiros capítulos como recordação, caso isto seja aconselhável.

Os capítulos 7, 8 e 9 constituem a terceira parte, em que são abordados os problemas de anuidades e empréstimos. Deixamos de lado as múltiplas classificações de anuidades existentes na literatura, por entendermos que as mesmas podem confundir o aluno, ao sugerirem que se está tratando de problemas de natureza diferente. Nosso enfoque foi o de mostrar, no capítulo 7, que o mais importante é compreender bem o modelo básico de anuidades, do qual decorrem todos os demais modelos de anuidades encontrados na prática.

Finalmente, no capítulo 10 temos a parte de inflação, em que procuramos abordar alguns dos aspectos mais importantes da indexação nas aplicações financeiras usuais.

O propósito inicial, ao escrever o presente trabalho, foi o de oferecer um material que facilitasse ao máximo o aprendizado da Matemática Financeira. Neste sentido, a objetividade e a didática na exposição tiveram preferência, deixando-se para os apêndices os tópicos mais complexos ou que, na opinião dos autores, são de importância secundária.

Outrossim, queremos agradecer a todos os alunos que, assistindo aos nossos cursos, contribuíram para este livro através de críticas e comentários. Nossos agradecimentos também a Luiz M. Candalaft, que revisou todo o texto, e a Sônia Regina M. Mizuno e Valdeliz B. Mathias, que elaboraram as tabelas financeiras.

Os Autores.



Parte I

# JUROS SIMPLES

# 1
# Juro e Montante

## 1. INTRODUÇÃO

O problema econômico decorre da escassez, ou seja, do fato de que as necessidades das pessoas são satisfeitas por bens e serviços cuja oferta é limitada. Ao longo do processo de desenvolvimento das sociedades, o problema de satisfazer às necessidades foi solucionado através da especialização e através do processo de troca de um bem por outro. Mais tarde surgiu um bem intermediário para este processo de trocas que é a moeda. Assim, o preço passou a ser o denominador comum de medida para o valor dos bens e a moeda um meio para acumular valor e constituir riqueza ou capital.

Constatou-se que os bens poderiam ser consumidos ou guardados para consumo futuro. Caso o bem fosse consumido ele desapareceria e, caso houvesse acumulação, o estoque de bens poderia servir para gerar novos bens e/ou riqueza através do processo produtivo.

A noção de juro decorre do fato de que a maioria das pessoas prefere consumir seus bens no presente e não no futuro. Em outras palavras, havendo uma preferência temporal para consumir, as pessoas querem uma recompensa pela abstinência. Este prêmio para que não haja consumo é o juro.

O juro também pode ser entendido como sendo o custo do crédito ou a remuneração do capital aplicado. Isto é, o juro é o pagamento pelo uso de poder aquisitivo por um determinado período de tempo. Associa-se então o juro à preferência temporal das pessoas, que é o desejo de efetuar

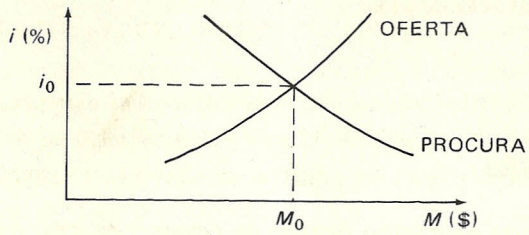
Roberval de Souza

o consumo o mais cedo possível. Nestas condições, a taxa de juros mede o custo da unidade de capital no período a que se refere a taxa.

Esta taxa é fixada no mercado de capitais pela interação entre as forças que regem a oferta de fundos e a procura de créditos. Em um mercado ideal ou perfeito, basicamente influirão os seguintes fatores:

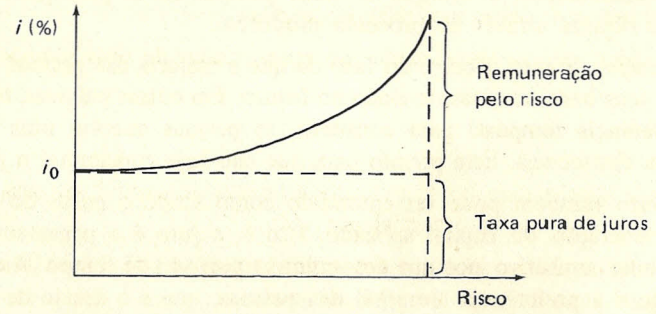
- *Oferta de fundos:* nível de riqueza das pessoas, suas preferências temporais e o valor da taxa de juros.
- *Procura de fundos:* a rentabilidade das aplicações existentes na economia e a preferência temporal das pessoas.

No gráfico abaixo tem-se a oferta e a procura de fundos e a *taxa pura de juros* ($i_o$), que corresponde à situação de equilíbrio em que o *montante de capital procurado é* $M_o$:




Diz-se que $i_o$ é uma taxa de juros pura porque exclui o fator risco que está associado às operações normais de mercado. O risco nas operações financeiras pode ser devido a causas diversas: o fato de que o devedor pode não pagar o débito, o maior ou menor tempo de empréstimo (as operações de curto prazo são menos arriscadas), o volume de capital emprestado etc.

Normalmente, o risco que acompanha as operações de empréstimo já é levado em conta na própria taxa:






Pode-se associar ao acréscimo na taxa pelo maior risco, como sendo um *seguro* que o ofertante de fundos cobra para assumi-lo. Por outro lado, dada a inexistência de informações perfeitas entre tomadores e emprestadores de fundos, no mercado real de capitais, temos um intervalo de variação para a taxa de juros ao invés de um valor único de equilíbrio. Além disto, as operações financeiras têm um custo de efetivação referente aos contratos e à intermediação dos agentes envolvidos. Tais custos são, geralmente, as comissões, imposto sobre operações financeiras (IOF), avais etc.

O *custo real* de um empréstimo, portanto, é obtido somando-se à taxa de juros pura o custo pelo risco e o custo de impostos e dos serviços de intermediação. Além disto, o problema da inflação (ou seja, o fato de que o valor da moeda se pode alterar ao longo do tempo) pode produzir variações no custo real dos empréstimos.

Admitiremos a hipótese de *mercado perfeito*, consubstanciada no seguinte:

- Qualquer valor pode ser obtido ou aplicado à taxa de juros de equilíbrio.
- As taxas consideradas são únicas e estáveis ao longo do tempo.

Nas aplicações serão introduzidas as correções e ressalvas necessárias.

## 2. DEFINIÇÕES

### 2.1. Taxa de juros

O juro é determinado através de um coeficiente referido a um dado intervalo de tempo. Tal coeficiente corresponde à remuneração da unidade de capital empregado por um prazo igual àquele da taxa.

Assim, por exemplo, falamos em 12% ao ano. Neste caso, a taxa de juros de 12% ao ano significa que, se empregarmos um certo capital àquela taxa, por um ano, obteremos 12% do capital.

As taxas de juro geralmente são apresentadas de dois modos:

#### 2.1.1. Forma porcentual

Neste caso a taxa diz-se aplicada a *centos* do capital, ou seja, ao que se obtém após dividir-se o capital por 100.

*Exemplo:* Qual o juro que rende um capital de Cr$ 1.000,00 aplicado por 1 ano à taxa de juros de 10% ao ano?

*Resolução:*

$$\text{juro} = \left(\frac{1.000,00}{100}\right) \times 10 \times 1$$

$$\text{juro} = 10,00 \times 10 \times 1 = \text{Cr\$ } 100,00$$

Então, é de Cr$ 100,00 o total de juros que a aplicação rende em 1 ano.

### 2.1.2. Forma unitária

Agora a taxa refere-se à *unidade* do capital, ou seja, estamos calculando o que rende a aplicação de *uma unidade de capital* no intervalo de tempo referido pela taxa.

Se tivermos uma taxa de 0,12 ao ano, então a aplicação de Cr$ 1,00 por um ano gera um juro de Cr$ 0,12.

*Exemplo:* O exercício anterior, com a taxa na forma unitária (0,10 a.a.).

*Resolução:*

$$\text{juro} = 1.000,00 \times 0,10 \times 1$$

$$\text{juro} = \text{Cr\$ } 100,00$$

Para transformar a *forma porcentual* em *unitária* basta dividir-se a taxa expressa na forma porcentual por 100.

*Exemplo:*

| FORMA PORCENTUAL | TRANSFORMAÇÃO | FORMA UNITÁRIA |
|---|---|---|
| 12% a.a. | $\frac{12}{100}$ | 0,12 a.a. |
| 6% a.s. | $\frac{6}{100}$ | 0,06 a.s. |
| 1% a.m. | $\frac{1}{100}$ | 0,01 a.m. |

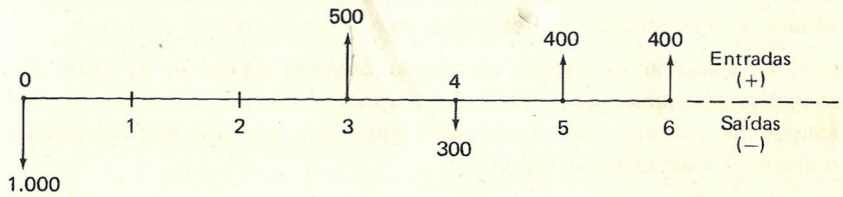
De modo análogo, para transformar a taxa de juros da forma unitária para a forma porcentual, basta que se multiplique a taxa de juros unitária por 100.



O leitor deve observar que é mais fácil trabalhar-se com a *forma unitária*, pois isto simplifica a notação e os cálculos.

### 2.2. Diagramas de capital no tempo

Os problemas financeiros dependem basicamente do fluxo (entradas e saídas) de dinheiro no tempo. Este fluxo é mais conhecido na prática como *fluxo de caixa* e pode ser representado do seguinte modo:

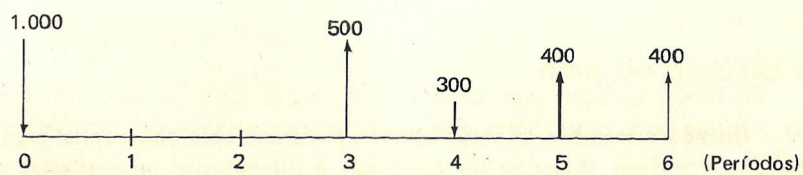



Esta representação é muito útil para situações em que é necessário visualizar-se o que está ocorrendo quando temos entradas e saídas de capital no tempo.

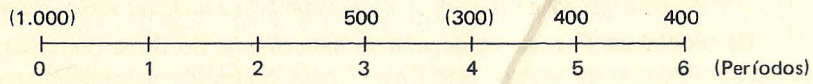
As convenções empregadas são as seguintes:

- A reta horizontal é uma escala de tempo, com a progressão de tempo dando-se da esquerda para a direita. Os *períodos de tempo* aparecem representados em intervalos contíguos, de modo que cada número representa os períodos acumulados. Podemos também utilizar a reta sem a escala, mas indicando o número de períodos envolvidos.
- As flechas significam entradas ou saídas de dinheiro. Assim, uma flecha para baixo significa uma saída ou aplicação de dinheiro (ou um valor negativo) e uma flecha para cima significa uma entrada ou recebimento de dinheiro (ou um valor positivo). Para que a convenção ficasse completa, o *tamanho* da flecha deveria representar proporcionalmente o valor do capital que está entrando ou saindo. Como esta representação tem um caráter auxiliar, optou-se por escrever o valor do dinheiro que está entrando ou saindo sem maiores preocupações de escala na própria flecha.

O diagrama anterior pode ser representado também do seguinte modo:

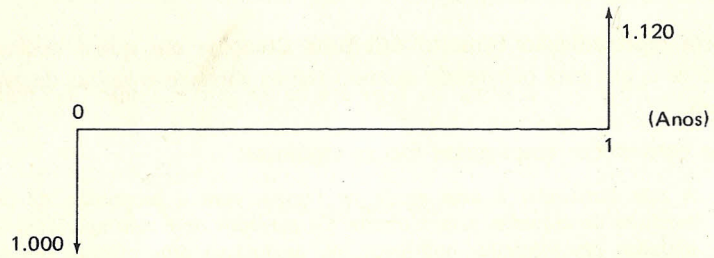


Ou então, lembrando que às saídas associamos *valores negativos*, e às entradas associamos *valores positivos*, tem-se:

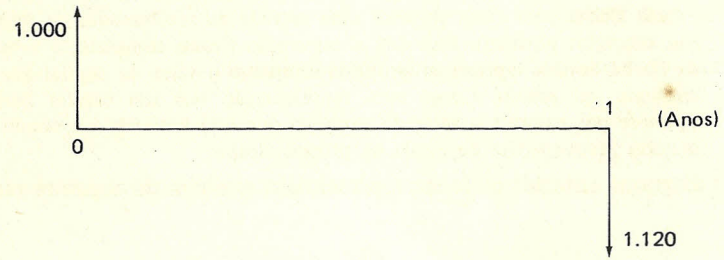



onde os valores negativos foram representados pelo número entre parênteses. Caso não interesse identificar o que é entrada ou saída de dinheiro, pode-se utilizar a representação gráfica acima com todos os valores positivos.

O diagrama de capital no tempo depende do ponto de vista. Por exemplo, admitamos que uma pessoa empreste Cr$ 1.000,00 à taxa de juro simples de 12% a.a., pelo prazo de 1 ano. Para a pessoa que *empresta* o dinheiro o diagrama é o seguinte:




Já para a pessoa que toma o dinheiro emprestado, tem-se o diagrama:




## 3. CÁLCULO DO JURO

Quando o regime é de juros simples, a remuneração pelo capital inicial aplicado (também chamado de principal) é diretamente proporcional ao



seu valor e ao tempo de aplicação. O fator de proporcionalidade é a taxa de juros.

*Exemplo:* Suponhamos que se tome emprestada a quantia de Cr$ 1.000,00 pelo prazo de 2 anos e à taxa de 10% a.a. Qual será o valor a ser pago como juro?

*Resolução:*

Capital inicial ($C$) = 1.000,00

Taxa de juros ($i$) = 10% a.a.

Número de períodos ($n$) = 2 anos

Trabalhando com a taxa de juros na forma unitária, temos o juro no primeiro ano como sendo:

$J_1 = 1.000,00 \times 0,10 \times 1 = Cr\$\ 100,00$

No segundo ano, teremos:

$J_2 = 1.000,00 \times 0,10 \times 1 = Cr\$\ 100,00$

O juro total será a soma do juro devido no primeiro ano ($J_1$) mais o juro devido no segundo ano ($J_2$):

$J = J_1 + J_2$

$J = 100,00 + 100,00 = Cr\$\ 200,00$

Ou então, podemos resolver o problema diretamente:

$J = 1.000,00 \times 0,10 \times 1 + 1.000,00 \times 0,10 \times 1$

$J = 1.000,00 \times 0,10 \times 2$

$J = Cr\$\ 200,00$

Fazendo a passagem para uma notação literal:

$C = 1.000,00$

$i = 0,10$ a.a.

$n = 2$ anos

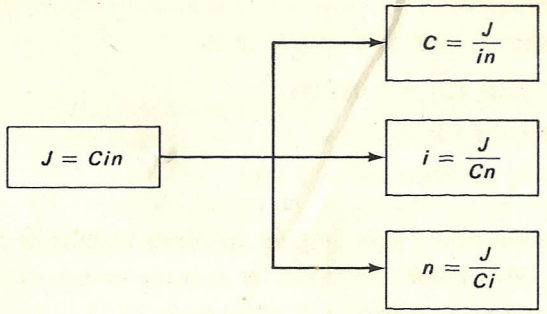
Temos:

$J = 1.000,00 \times 0,10 \times 2$

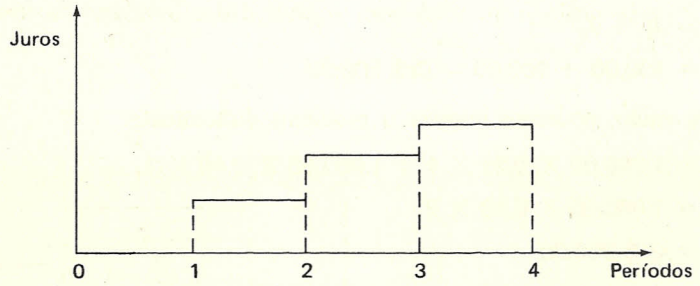
Ou:

$$\boxed{J = Cin} \qquad (1)$$

Esta é a *fórmula básica* para o cálculo de juros em um regime simples de capitalização. Observe-se que, dados 3 valores da fórmula, poderemos obter o quarto, por simples transformação algébrica:




Pela fórmula (1) podemos calcular o valor do juro para qualquer prazo ($n$). Entretanto, admite-se que o juro e o principal são devidos apenas no fim do prazo de aplicação, a menos que haja mudança de convenção:




Veja que, apesar de a fórmula (1) representar uma função contínua, pela convenção adotada ela se comporta de modo descontínuo.

Um outro ponto importante diz respeito ao fato de que *o prazo de aplicação ($n$) deve estar expresso, nas fórmulas, na mesma unidade de tempo a que se refere a taxa ($i$) considerada.*

*Exemplo:* Quanto rende um principal de Cr$ 100,00 aplicado à taxa de 5% ao semestre e por um prazo de 2 anos?

*Resolução:*

$C = 100{,}00$



$i = 5\%$ a.s. ou $i = 0{,}05$ a.s.

$n = 2$ anos $= 4$ semestres

Então, tem-se:

$J = Cin$

$J = 100{,}00 \times 0{,}05 \times 4 = \text{Cr\$ } 20{,}00$

## 4. MONTANTE

Define-se como montante de um capital, aplicado à taxa $i$ e pelo prazo de $n$ períodos, como sendo a soma do juro mais o capital inicial.

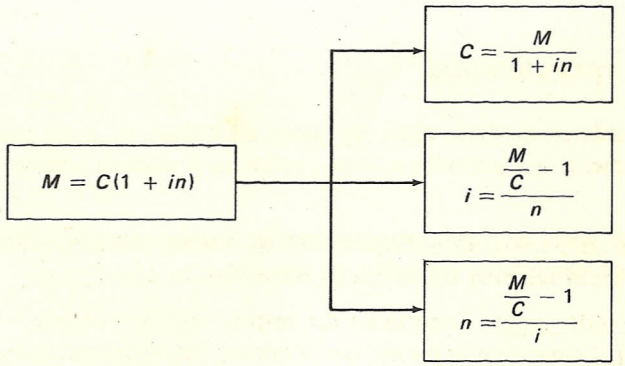
Sendo $C$ o principal, aplicado por $n$ períodos e à taxa de juros $i$, temos o montante ($M$) como sendo:

$M = C + J$

$M = C + Cin$

$$M = C(1 + in) \qquad (2)$$

De modo análogo ao visto para o juro, dados 3 valores da fórmula poderemos obter o quarto valor:




*Exemplo:* Qual é o montante de um capital de Cr$ 1.000,00 aplicado à taxa de 10% a.a. pelo prazo de 2 anos?

*Resolução:*

$C = 1.000{,}00$

$i = 0{,}10$ a.a.

$n = 2$ anos

E sendo:

$M = C(1 + in)$

Substituindo-se os valores, tem-se:

$M = 1.000\,(1 + 0{,}10 \times 2)$

$M = 1.000\,(1 + 0{,}20)$

$M = 1.000 \times 1{,}20$

$M = \text{Cr\$}\ 1.200{,}00$

É possível resolver o problema, seguindo-se a definição dada para montante:

a) Calculando o juro devido:

$J = Cin$

$J = 1.000{,}00 \times 0{,}10 \times 2 = \text{Cr\$}\ 200{,}00$

b) Somando-se o juro com o principal:

$M = C + J$

$M = 1.000{,}00 + 200{,}00 = \text{Cr\$}\ 1.200{,}00$

## 5. TAXA PROPORCIONAL

Consideremos duas taxas de juros arbitrárias $i_1$ e $i_2$, relacionadas respectivamente aos períodos $n_1$ e $n_2$, referidos à unidade comum de tempo das taxas.

Estas taxas se dizem *proporcionais* se houver uma proporção entre as taxas e seus respectivos períodos, ou seja, se

$$\boxed{\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}} \qquad (3)$$

Como em uma proporção o produto dos *meios* é igual ao produto dos *extremos*, temos:

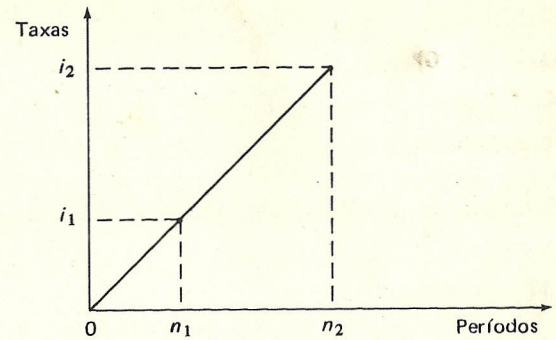
$$i_1 n_2 = i_2 n_1$$



Ou seja, podemos escrever a fórmula (3) do seguinte modo:

$$\frac{i_1}{n_1} = \frac{i_2}{n_2}$$

Vejamos esta relação de modo gráfico, através de semelhança de triângulos:




*Exemplo:* Verificar se as taxas de 5% ao trimestre e de 20% ao ano são proporcionais.

*Resolução:*

Temos:

$i_1 = 5\%$ a.t. $= 0{,}05$ a.t.

$i_2 = 20\%$ a.a. $= 0{,}20$ a.a.

$n_1 = 3$ meses

$n_2 = 12$ meses

Como:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Substituindo-se os valores:

$$\frac{0{,}05}{0{,}20} = \frac{3}{12}$$

que são grandezas proporcionais, porque o produto dos *meios* ($0{,}20 \times 3$) é igual ao produto dos *extremos* ($0{,}05 \times 12$). Logo, as taxas dadas são *proporcionais*.

*Exemplo:* Sendo dada a taxa de juros de 24% ao ano, determinar a taxa proporcional mensal.

*Resolução:*

Tem-se:

$i_1 = 0{,}24$ a.a.

$n_1 = 12$ meses

$i_2 = ?$

$n_2 = 1$ mês

E, como:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

tem-se:

$$\frac{0{,}24}{i_2} = \frac{12}{1}$$

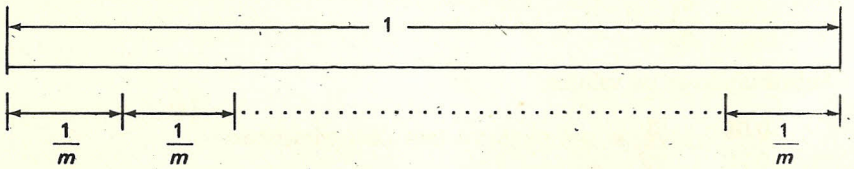
$$0{,}24 \times 1 = i_2 \times 12$$

$$\therefore\ i_2 = \frac{0{,}24}{12} = 0{,}02 \text{ a.m.}$$

ou

$i_2 = 2\%$ a.m.

Este problema (achar-se a taxa proporcional a uma fração de período) merece ser estudado com um pouco mais de cuidado. Sendo $i$ a taxa de juros correspondente a 1 período e admitindo-se que queremos determinar a taxa proporcional $i_m$, correspondente à fração $1/m$ de um período, tem-se:




Ou seja, o intervalo de tempo unitário correspondente à taxa de juros $i$ foi dividido em $m$ partes iguais.



Temos então:

$i_1 = i$

$n_1 = 1$ período

$i_2 = i_m = ?$

$n_2 = \frac{1}{m}$ de período

Como

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

tem-se

$$\frac{i}{i_m} = \frac{1}{\frac{1}{m}}$$

Portanto:

$$\boxed{i_m = \frac{i}{m}} \qquad (4)$$

Ou seja, para achar-se a taxa proporcional a uma fração de um período basta dividir a taxa dada pelo denominador da fração. Esta fórmula é a mesma que seria obtida caso a taxa $i$ se referisse a $n$ períodos, dos quais se considerasse a fração $n/m$ para cálculo da taxa proporcional $i_m$, como o leitor pode verificar:

$$\frac{i}{i_m} = \frac{n}{\frac{n}{m}} \qquad \therefore \qquad i_m = \frac{i}{m}$$

*Exemplo:* Sendo dada a taxa de 10% ao semestre, achar a taxa trimestral que lhe é proporcional.

*Resolução:*

$i = 0{,}10$ a.s.

$m = 2$ (porque um semestre tem dois trimestres)

Como:

$$i_m = \frac{i}{m}$$

temos:

$$i_2 = \frac{0{,}10}{2} = 0{,}05 \text{ a.t.}$$

ou:

$$i_2 = 5\% \text{ a.t.}$$

## 6. TAXA EQUIVALENTE

Duas taxas se dizem *equivalentes* se, aplicado um mesmo capital às duas taxas e pelo mesmo intervalo de tempo, ambas produzirem o mesmo juro.

Sejam as taxas de juros $i$, referente a 1 período e $i_m$ referente à fração $1/m$, supostas equivalentes.

Pela definição dada, seja:

$$J_i = C \cdot i \cdot 1 = Ci$$

que é o juro gerado quando se aplica o principal ($C$) à taxa dada ($i$) por um período.

Por outro lado, como o período da taxa $i$ foi dividido em $m$ partes, então o principal ($C$) deverá ser aplicado por $m$ períodos à taxa $i_m$:

$$J_{i_m} = C \cdot i_m \cdot m$$

Como as taxas são equivalentes, ambas devem ter gerado o mesmo juro, ou seja:

$$J_i = J_{i_m}$$

Portanto:

$$Ci = Ci_m m$$

Isto é:

$$i_m = \frac{i}{m}$$

Torna-se então evidente que, no regime de juros simples, as taxas de juros proporcionais são igualmente equivalentes. É, portanto, indiferente falar-se que duas taxas de juros são proporcionais ou que são equivalentes.



*Exemplo:* Seja um capital de Cr$ 10.000,00, que pode ser aplicado alternativamente à taxa de 2% a.m. ou de 24% a.a. Supondo um prazo de aplicação de 2 anos, verificar se as taxas são equivalentes.

*Resolução:*

Aplicando o principal à taxa de 2% a.m. e pelo prazo de 2 anos, teremos o juro de:

$$J_1 = 10.000{,}00 \times 0{,}02 \times 24 = \text{Cr\$ } 4.800{,}00$$

Aplicando o mesmo principal à taxa de 24% a.a., por 2 anos, teremos um juro igual a:

$$J_2 = 10.000{,}00 \times 0{,}24 \times 2 = \text{Cr\$ } 4.800{,}00$$

Constatamos que o juro que será gerado é igual nas duas hipóteses e, nestas condições, concluímos que a taxa de 2% a.m. é equivalente à taxa de 24% a.a.

## 7. PERÍODOS NÃO-INTEIROS

Já vimos que o juro e o principal se supõem devidos apenas no final do prazo de aplicação. Entretanto, podem ocorrer situações em que o prazo de aplicação ($n$) não é um número inteiro de períodos a que se refere a taxa dada, sendo necessário considerarem-se frações de períodos para que não se cometa erro no valor final.

A solução pode ser obtida em duas etapas:

*1ª etapa:* calcula-se o juro correspondente à parte inteira de períodos.

*2ª etapa:* calcula-se a taxa proporcional à fração de período que resta e o juro correspondente.

O juro total será igual à soma do juro referente à parte inteira de períodos com o juro da parte fracionária. O montante será a soma do principal com o juro total.

*Exemplo:* Qual o juro e qual o montante de um capital de Cr$ 1.000,00 que é aplicado à taxa de juros simples de 12% ao semestre, pelo prazo de 5 anos e 9 meses?

*Resolução:*

Sabemos que em 5 anos e 9 meses existem:

5 × 2 semestres = 10 semestres

9 meses = 1 semestre e 3 meses

Ou seja, em 5 anos e 9 meses temos 11 semestres e 3 meses.

a) *Cálculo do juro:*

*1ª etapa:*

$J_1 = 1.000,00 \times 0,12 \times 11 = Cr\$ 1.320,00$

*2ª etapa:*

Calculamos a taxa de juros proporcional ao trimestre:

$$i_m = \frac{i}{m} = \frac{0,12}{2} = 0,06 \text{ a.t.}$$

Portanto:

$J_2 = 1.000,00 \times 0,06 \times 1 = Cr\$ 60,00$

Logo, o total de juros é:

$J = J_1 + J_2$

$J = 1.320,00 + 60,00$

$J = Cr\$ 1.380,00$

Observe-se que a solução se obtém mais rapidamente lembrando-se que 3 meses é igual a 0,5 semestre e, nestas condições, 5 anos e 9 meses equivalem a 11,5 semestres:

$J = 1.000,00 \times 0,12 \times 11,5 = Cr\$ 1.380,00$

b) *Montante:*

O montante é:

$M = C + J$

$M = 1.000,00 + 1.380,00$

$\therefore M = Cr\$ 2.380,00$

Evidentemente poderíamos obter o mesmo resultado raciocinando por etapas para obter o montante.

## 8. JURO EXATO E JURO COMERCIAL

Nas aplicações correntes, muito embora as taxas sejam expressas em termos anuais, os prazos são fixados em dias. Como a curto prazo o regime geralmente adotado é o de juros simples, torna-se necessário calcular a taxa proporcional referente a 1 dia.

Neste caso, podemos ter dois enfoques, dependendo do número de dias adotado para o ano:



a) ano civil: 365 dias;

b) ano comercial: 360 dias.

Nas aplicações práticas, onde é adotada a convenção de *ano comercial*, o *mês comercial* tem 30 dias. Por outro lado, como a contagem de dias deve ser exata, é necessário levar em conta também a existência de anos bissextos.

*Exemplo:* Dada a taxa de 36% ao ano, quer-se saber qual é a taxa proporcional a 1 dia para as convenções do ano civil e do ano comercial.

*Resolução:*

Pelo ano civil:

$$i_{365} = \frac{36\%}{365} = 0,0986\% \text{ ao dia}$$

Pelo ano comercial:

$$i_{360} = \frac{36\%}{360} = 0,1\% \text{ ao dia}$$

Observe que a *taxa diária* obtida com base na convenção de ano comercial é ligeiramente *maior* que a obtida pela convenção de ano civil, pois o divisor utilizado é menor.

### 8.1. Juro exato

Chama-se *juro exato* aquele que é obtido quando o período ($n$) está expresso em dias e quando é adotada a convenção de *ano civil*:

$$\boxed{J_e = \frac{Cin}{365}} \qquad (5)$$

*Exemplo:* Qual é o juro exato de um capital de Cr$ 10.000,00 que é aplicado por 40 dias e à taxa de 36% a.a.?

*Resolução:*

$$J_e = \frac{Cin}{365}$$

$$J_e = \frac{10.000,00 \times 0,36 \times 40}{365} = Cr\$ 394,52$$

### 8.2. Juro comercial

Denomina-se *juro comercial* (ou ordinário) o juro que é calculado quando se adota como base o *ano comercial*:

$$J_c = \frac{Cin}{360} \qquad (6)$$

Analogamente, neste caso o período ($n$) deverá ser expresso em número de dias.

*Exemplo:* Calcular o juro comercial correspondente ao exercício do item anterior.

*Resolução:*

$$J_c = \frac{Cin}{360}$$

$$J_c = \frac{10.000{,}00 \times 0{,}36 \times 40}{360} = \text{Cr\$ } 400{,}00$$

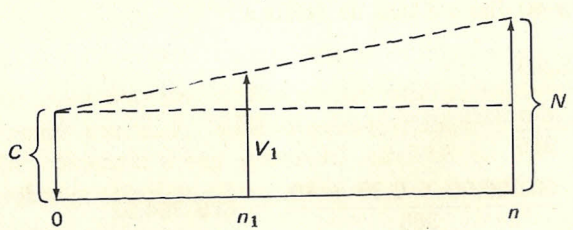
Observe que, nas mesmas condições de aplicação, o juro comercial é maior que o juro exato.

## 9. VALOR ATUAL E VALOR NOMINAL

O *valor atual* corresponde ao valor de um compromisso de débito ou de crédito em uma determinada data compreendida entre o início e o término do compromisso. O *valor nominal* é o valor da aplicação (ou do recebimento) em sua data de vencimento, ou seja, é a soma do capital mais juros (que é o próprio montante).

Podemos dizer que o *valor atual* capitalizado até a data de vencimento, à taxa de juros $i$ aprazada entre as partes, reproduz o *valor nominal*.

Vejamos estes conceitos graficamente: seja um principal ($C$) aplicado a uma taxa de juros dada ($i$) e por um certo prazo ($n$):






Se o principal permanecer aplicado pelo prazo $n$, obteremos o *valor nominal* ($N$) que corresponde ao montante da aplicação, ou seja, à soma do capital mais juros. Nestas condições o principal é o próprio *valor atual* do valor nominal:

$$C = \frac{N}{1 + in}$$

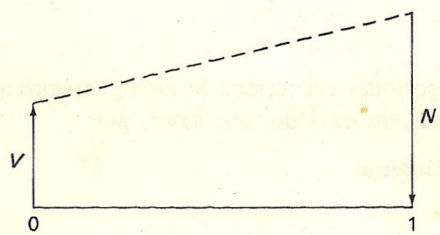
Caso o principal seja resgatado antes do prazo (por exemplo, na data $n_1$), obteremos um dado *valor atual* ($V_1$), que capitalizado pelo tempo que falta (a diferença entre $n$ e $n_1$) deve reproduzir o valor nominal ($N$):

$$V_1 = \frac{N}{1 + i(n - n_1)}$$

Este raciocínio pode ser empregado então para se calcular o *valor atual* entre qualquer data compreendida entre a data de aplicação e a data de vencimento.

*Exemplo:* Tenho uma letra de câmbio no valor nominal de Cr$ 1.200,00, que é resgatável daqui a 1 ano. Sabendo-se que a taxa de juros corrente no mercado é de 20% a.a., por quanto devo oferecer a letra a uma pessoa interessada em adquiri-la?

*Resolução:*




$N = 1.200{,}00$

$i = 0{,}20$ a.a.

$n = 1$ ano

$V = ?$

Ou seja, devo calcular quanto a letra *vale hoje* (data zero), levando em conta que o comprador potencial pode aplicar seu dinheiro à taxa de juros de 20% a.a. no mercado. Observe-se que o comprador não está interessado em saber qual a taxa de juros que foi utilizada quando da aquisição da letra de câmbio.

Nestas condições, temos:

$N = V(1 + in)$

$1.200 = V(1 + 0{,}2 \times 1)$

$1.200 = V(1{,}20)$

$\therefore \quad V = \dfrac{1.200}{1{,}20} = \text{Cr\$ } 1.000{,}00$

Logo, devo oferecer a letra por Cr$ 1.000,00, que corresponde ao ao seu *valor atual.*

## 10. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcular a taxa de juros trimestral proporcional às seguintes taxas:

a) 24% a.a.

b) 36% ao biênio

c) 6% ao semestre

*Resolução:*

A proporção entre as taxas deve ser igual à proporção entre os períodos a que se referem. Portanto:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2} \Longrightarrow i_1 = i_2 \frac{n_1}{n_2}$$

Expressando os períodos em termos de meses, teremos que a taxa proporcional será obtida, em cada um dos casos, por:

a) $i_1$ = taxa trimestral

$i_2$ = 24% a.a.

$n_1$ = 3 meses

$n_2$ = 12 meses

$$i_1 = i_2 \frac{n_1}{n_2}$$

$$i_1 = (24\%) \frac{3}{12}$$

$\therefore \quad i_1 = 6\%$ a.t.

b) $i_1$ = taxa trimestral

$i_2$ = 36% ao biênio



$n_1$ = 3 meses

$n_2$ = 24 meses (visto que em cada ano temos 12 meses)

$$i_1 = i_2 \frac{n_1}{n_2}$$

$$i_1 = (36\%) \frac{3}{24}$$

$\therefore \quad i_1 = 4{,}5\%$ a.t.

c) $i_1$ = taxa trimestral

$i_2$ = 6% a.s.

$n_1$ = 3 meses

$n_2$ = 6 meses

$$i_1 = i_2 \frac{n_1}{n_2}$$

$$i_1 = (6\%) \frac{3}{6}$$

$\therefore \quad i_1 = 3\%$ a.t.

2. Determinar a taxa de juros anual proporcional, dadas as seguintes taxas:

a) 3% ao trimestre

b) 27% ao quadrimestre

c) 5% a.m.

*Resolução:*

Transformando os períodos em meses, teremos:

a) $i_1$ = taxa anual

$i_2$ = 3% a.t.

$n_1$ = 12 meses

$n_2$ = 3 meses

Como

$$i_1 = i_2 \frac{n_1}{n_2}$$

então

$$i_1 = (3\%) \frac{12}{3}$$

$\therefore \quad i_1 = 12\%$ a.a.

b) $i_1$ = taxa anual

$i_2 = 27\%$ a.q.

$n_1 = 12$ meses

$n_2 = 4$ meses

$$i_1 = i_2 \frac{n_1}{n_2}$$

$$i_1 = (27\%) \frac{12}{4}$$

$$\therefore \; i_1 = 81\% \text{ a.a.}$$

c) $i_1$ = taxa anual

$i_2 = 5\%$ a.m.

$n_1 = 12$ meses

$n_2 = 1$ mês

$$i_1 = i_2 \frac{n_1}{n_2}$$

$$i_1 = (5\%) \frac{12}{1}$$

$$\therefore \; i_1 = 60\% \text{ a.a.}$$

3. Calcular o juro simples referente a um capital de Cr$ 1.000,00 aplicado conforme hipóteses abaixo:

Taxa de juros – Prazo

a) 15% a.a. – 1 ano
b) 17% a.a. – 4 anos
c) 21% a.a. – 5 meses
d) 26,8% a.a. – 30 meses
e) 30,8% a.a. – 5 anos e meio
f) 38% a.a. – 4 anos e 8 meses

*Resolução:*

O cálculo dos juros devidos será feito pela fórmula:

$$J = Cin$$

onde: $J$ = juros

$C$ = capital inicial ou principal



$i$ = taxa de juros na forma unitária

$n$ = número de períodos da aplicação

**Nota:** A taxa de juros nos cálculos, salvo situações em que a forma porcentual for explicitada, encontrar-se-á sempre na forma unitária.

a) $C = 1.000$

$i = 15\%$ a.a.

$n = 1$ ano

$J = Cin$

$J = 1.000 \times 0,15 \times 1 =$ Cr$ 150,00

b) $C = 1.000$

$i = 17\%$ a.a.

$n = 4$ anos

$J = Cin$

$J = 1.000 \times 0,17 \times 4$

$J = 1.000 \times 0,68 =$ Cr$ 680,00

c) $C = 1.000$

$i = 21\%$ a.a.

$n = 5$ meses

$J = Cin$

$$J = 1.000 \times \frac{0,21}{12} \times 5$$

A taxa de juros $i$ foi dividida por 12, porque a taxa é anual e o número de períodos se refere a meses. Prosseguindo, teremos:

$J = 1.000 \times 0,0875 =$ Cr$ 87,50

d) $C = 1.000$

$i = 26,8\%$ a.a.

$n = 30$ meses

$J = Cin$

$$J = 1.000 \times \frac{0,268}{12} \times 30$$

$J = 1.000 \times 0,67 =$ Cr$ 670,00

e) $C = 1.000$

$i = 30,8\%$ a.a.

$n = 5$ anos e meio ou 5,5 anos

$J = Cin$

$J = 1.000 \times 0,308 \times 5,5$

$J = 1.000 \times 1,694 = \text{Cr\$ } 1.694,00$

f) $C = 1.000$

$i = 38\%$ a.a.

$n = 4$ anos e 8 meses

$J = Cin$

$J = 1.000 \times \frac{0,38}{12} \times 56$; onde 56 = 4 anos e 8 meses

$J = 1.000 \times 1,77333 = \text{Cr\$ } 1.773,33$

Outro modo de se resolver o problema é transformar o número de períodos em termos anuais, onde os meses são representados por uma fração:

$$J = 1.000 \times 0,38 \times \left(4 + \frac{8}{12}\right)$$

$J = 1.000 \times 0,38 \times 4,666667$

$J = 1.000 \times 1,77333 = \text{Cr\$ } 1.773,33$

4. Que montante receberá um aplicador que tenha investido Cr$ 5.000,00, se as hipóteses de taxas de aplicação e respectivos prazos forem:

Taxa de juros – Prazos

a) 18% a.a. – 6 meses

b) 31,8% a.a. – 2 anos e 7 meses

c) 42% a.a. – 4 anos e 3 meses

*Resolução:*

Considerando que o montante ($M$) é igual a

$$M = C + J$$

ou

$$M = C(1 + in)$$

podemos solucionar o problema de dois modos. No primeiro caso, calculamos inicialmente o valor dos juros, os quais serão adicionados ao capital



investido, ou seja, o cálculo do montante ($M$) é feito em duas etapas. Na segunda expressão, este cálculo é efetuado diretamente.

a) $C = 5.000$

$i = 18\%$ a.a.

$n = 6$ meses

$M = C + J$

Calculando os juros, teremos:

$J = Cin$

$$J = 5.000 \times 0,18 \times \frac{6}{12}$$

$J = 5.000 \times 0,09 = \text{Cr\$ } 450,00$

Portanto:

$M = 5.000 + 450 = \text{Cr\$ } 5.450,00$

Efetuando o cálculo do montante em uma etapa apenas, teremos:

$M = C(1 + in)$

$$M = 5.000 \left(1 + 0,18 \times \frac{6}{12}\right)$$

$M = 5.000\ (1 + 0,09)$

$M = 5.000 \times 1,09 = \text{Cr\$ } 5.450,00$

b) $C = 5.000$

$i = 31,8\%$ a.a.

$n = 2$ anos e 7 meses ou 31 meses

$$M = 5.000 \left(1 + 0,318 \times \frac{31}{12}\right)$$

$M = 5.000\ (1 + 0,8215)$

$M = 5.000 \times 1,8215 = \text{Cr\$ } 9.107,50$

c) $C = 5.000$

$i = 42\%$ a.a.

$n = 4$ anos e 3 meses ou 51 meses ou 4,25 anos

$M = C(1 + in)$

$$M = 5.000 \left(1 + 0{,}42 \times \frac{51}{12}\right)$$

$$M = 5.000\ (1 + 1{,}785)$$

$$M = 5.000 \times 2{,}785 = \text{Cr\$ } 13.925{,}00$$

5. Qual é a taxa de juros anual cobrada em cada um dos casos abaixo, se uma pessoa aplicou o capital de Cr$ 1.000,00 e recebeu:

| Montante | – Prazos |
|---|---|
| a) Cr$ 1.420,00 | – 2 anos |
| b) Cr$ 1.150,00 | – 10 meses |
| c) Cr$ 1.350,00 | – 1 ano e 9 meses |

*Resolução:*

Analogamente às questões apresentadas no problema anterior, pode-se resolver este problema considerando uma das expressões:

$$M = C + J$$

ou

$$M = C\,(1 + in)$$

a) $M = 1.420$

$C = 1.000$

$n = 2$ anos

$$M = C + J$$

$$\therefore\ J = M - C$$

$$J = 1.420 - 1.000 = \text{Cr\$ } 420{,}00$$

Pela fórmula de juros, teremos:

$$J = Cin$$

$$420 = 1.000 \times i \times 2$$

$$i = \frac{420}{2.000}$$

$$\therefore\ i = 0{,}21 \quad \text{ou} \quad i = 21\%\ \text{a.a.}$$

Aplicando a fórmula do montante, obteremos:

$$M = C\,(1 + in)$$

$$1.420 = 1.000\ (1 + i \times 2)$$



$$\frac{1.420}{1.000} = 1 + i \times 2$$

$$1{,}42 = 1 + i \times 2$$

$$i = \frac{0{,}42}{2}$$

$$\therefore\ i = 0{,}21 \quad \text{ou} \quad i = 21\%\ \text{a.a.}$$

b) $M = 1.150$

$C = 1.000$

$n = 10$ meses

$$M = C\,(1 + in)$$

$$1.150 = 1.000 \left(1 + i \times \frac{10}{12}\right)$$

A taxa $i$ encontra-se dividida por 12, porque o número de períodos $n$ está expresso em meses.

$$\frac{1.150}{1.000} = 1 + i \times \frac{10}{12}$$

$$1{,}15 = 1 + i \times \frac{10}{12}$$

$$1{,}15 - 1 = i \times \frac{10}{12}$$

$$i = 0{,}15 \times \frac{12}{10}$$

$$\therefore\ i = 0{,}18 \quad \text{ou} \quad i = 18\%\ \text{a.a.}$$

c) $M = 1.350$

$C = 1.000$

$n = 1$ ano e 9 meses ou 21 meses

$$M = C\,(1 + in)$$

$$1.350 = 1.000 \left(1 + i \times \frac{21}{12}\right)$$

$$\frac{1.350}{1.000} = 1 + i \times \frac{21}{12}$$

$$1{,}35 = 1 + i \times \frac{21}{12}$$

$$i = 0{,}35 \times \frac{12}{21}$$

$$\therefore\ i = 0{,}20 \quad \text{ou} \quad i = 20\%\ \text{a.a.}$$

6. Quanto tempo deve ficar aplicado um capital para que as hipóteses abaixo sejam verdadeiras?

Capital inicial – Montante – Taxa de juros

a) Cr$ 800,00 – Cr$ 832,00 – 16% a.a.

b) Cr$ 1.200,00 – Cr$ 2.366,00 – 22% a.a.

*Resolução:*

a) $M = 832$

$C = 800$

$i = 16\%$ a.a.

$$J = M - C$$

$$J = 832 - 800 = \text{Cr\$ } 32{,}00$$

Resolvendo pela fórmula de juros, teremos:

$$J = Cin$$

$$32 = 800\,(0{,}16)n$$

$$32 = 128n$$

$$n = \frac{32}{128}$$

$$\therefore\ n = 0{,}25 \text{ anos}$$

Se $n$ fosse igual a 1, então concluiríamos que a aplicação foi feita por 1 ano. Isto porque sabemos que a taxa de juros e o número de períodos se devem referir à mesma unidade de tempo. Contudo, como $n < 1$, conclui-se que o prazo de aplicação é inferior a 1 ano.

Por proporções, teremos:

$$1 \text{ ------ } 12 \text{ meses}$$

$$0{,}25 \text{ ------ } X \text{ meses}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{0{,}25}{X}$$

$$X = 12 \times 0{,}25$$

$$\therefore\ X = 3 \text{ meses}$$



Caso optássemos pela resolução através da fórmula do montante, teríamos:

$$M = C(1 + in)$$

$$832 = 800\,(1 + 0{,}16n)$$

$$\frac{832}{800} = 1 + 0{,}16n$$

$$1{,}04 = 1 + 0{,}16n$$

$$0{,}04 = 0{,}16n$$

$$n = \frac{0{,}04}{0{,}16}$$

$$\therefore\ n = 0{,}25 \text{ anos}$$

O cálculo do valor em meses segue o raciocínio já apresentado.

b) $M = 2.366$

$C = 1.200$

$i = 22\%$ a.a.

$$M = C(1 + in)$$

$$2.366 = 1.200\,(1 + 0{,}22n)$$

$$\frac{2.366}{1.200} = 1 + 0{,}22n$$

$$1{,}97167 = 1 + 0{,}22n$$

$$0{,}97167 = 0{,}22n$$

$$n = \frac{0{,}97167}{0{,}22}$$

$$\therefore\ n = 4{,}41668 \text{ anos}$$

Temos, por conseguinte, que o período é de 4 anos mais 0,41668 do 5º ano. Em termos de meses, esta fração anual será:

$$1 \text{ ------ } 12 \text{ meses}$$

$$0{,}41668 \text{ ------ } X \text{ meses}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{0{,}41668}{X}$$

$$X = 12 \times 0{,}41668$$

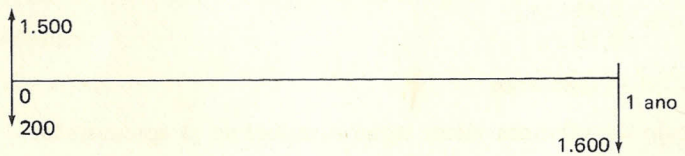
$$\therefore\ X = 5 \text{ meses}$$

Então, o prazo de aplicação total é de 4 anos e 5 meses.

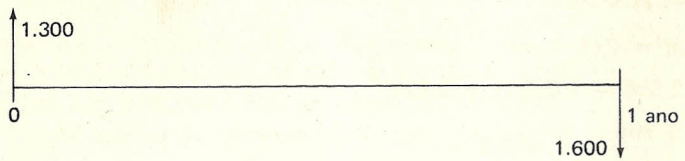
7. Uma loja vende um gravador por Cr$ 1.500,00 a vista. A prazo, vende por Cr$ 1.800,00, sendo Cr$ 200,00 de entrada e o restante após 1 ano. Qual é a taxa de juros anual cobrada?

*Resolução:*

A pessoa, se optar por pagar a prazo, receberá financiamento por apenas Cr$ 1.300,00, pois se possuísse esta quantia poderia comprar a vista, já que os Cr$ 200,00 serão desembolsados em qualquer hipótese. Esta situação é mais visível no diagrama abaixo:




Este diagrama pode ser transformado em:




Tudo se passa como se o cliente tivesse recebido Cr$ 1.300,00 emprestados, comprometendo-se a devolver Cr$ 1.600,00 após o prazo de 1 ano. Portanto:

$M = 1.600$

$C = 1.300$

$n = 1$ ano

$M = C(1 + in)$

$1.600 = 1.300(1 + i \times 1)$

$\frac{1.600}{1.300} = 1 + i$

$1,2307 = 1 + i$

$\therefore\ i = 0,2307$ ou $i = 23,07\%$ a.a.

8. Quanto tempo deve permanecer aplicado um capital para que o juro seja igual a 5 vezes o capital, se a taxa de juros for de 25% a.a.?



*Resolução:*

Pelo enunciado do problema, temos:

$J = 5C$

Temos, portanto, os seguintes dados:

$J = 5C$

$i = 25\%$ a.a.

$J = Cin$

$5C = C(0,25)n$

$n = \frac{5\not{C}}{0,25 \times \not{C}}$

$\therefore\ n = 20$ anos

9. Em quanto tempo o montante produzido por um capital de Cr$ 1.920,00 aplicado a 25% a.a. se iguala ao montante de um capital de Cr$ 2.400,00 aplicado a 15% a.a.? Admitir que ambos sejam investidos na mesma data.

*Resolução:*

Considerando $M_1$ o montante produzido por Cr$ 1.920,00 à taxa de 25% a.a. e $M_2$ o montante produzido por Cr$ 2.400,00 à taxa de 15% a.a., o problema é encontrar o número de períodos $n$, tal que $M_1$ seja igual a $M_2$.

$C_1 = 1.920$

$i_1 = 25\%$ a.a.

$M_1 = 1.920(1 + 0,25n)$

e

$C_2 = 2.400$

$i_2 = 15\%$ a.a.

$M_2 = 2.400(1 + 0,15n)$

Como os montantes deverão ser iguais, então:

$M_1 = M_2$

$1.920(1 + 0,25n) = 2.400(1 + 0,15n)$

$1 + 0,25n = \frac{2.400(1 + 0,15n)}{1.920}$

$1 + 0,25n = 1,25(1 + 0,15n)$

$$1 + 0{,}25n = 1{,}25 + 0{,}1875n$$

$$0{,}25n - 0{,}1875n = 1{,}25 - 1$$

$$0{,}0625n = 0{,}25$$

$$n = \frac{0{,}2500}{0{,}0625}$$

$$\therefore\ n = 4 \text{ anos}$$

10. Se um capital de Cr$ 2.000,00 rendeu Cr$ 840,00 de juros em 2 anos, qual é a taxa de juros equivalente trimestral?

*Resolução:*

Em 2 anos temos 8 trimestres, portanto:

$C = 2.000$

$n = 8$ trimestres

$J = 840$

$$J = Cin$$

$$840 = 2.000 \times i \times 8$$

$$i = \frac{840}{16.000}$$

$$\therefore\ i = 0{,}0525 \quad \text{ou} \quad i = 5{,}25\% \text{ a.t.}$$

11. Uma pessoa aplicou Cr$ 1.500,00 no mercado financeiro e após 5 anos recebeu o montante de Cr$ 3.000,00. Que taxa equivalente semestral recebeu?

*Resolução:*

De modo análogo ao apresentado no problema 10, aqui se pode transformar o prazo de aplicação em períodos a que se refere a taxa equivalente que desejamos calcular. Isto possibilita o cálculo direto da taxa equivalente. Entretanto, podemos também calcular a taxa referente ao prazo explicitado no enunciado do problema, sendo a taxa equivalente calculada a seguir.

$C = 1.500$

$n = 5$ anos

$M = 3.000$

$$M = C(1 + in)$$

$$3.000 = 1.500(1 + i \times 5)$$



$$\frac{3.000}{1.500} = 1 + i \times 5$$

$$2 - 1 = i \times 5$$

$$i = \frac{1}{5}$$

$$\therefore\ i = 0{,}20 \quad \text{ou} \quad 20\% \text{ a.a.}$$

Como queremos a taxa equivalente semestral, então vem:

$$i_m = \frac{i}{m}$$

onde $i_m$ é a taxa equivalente e $m$ é o número de períodos a que se refere $i_m$ contidos no período a que se refere a taxa $i$. Neste problema, temos:

$i = 20\%$ a.a.

$i_m =$ taxa equivalente semestral

$m = 2$ (1 ano contém 2 semestres)

$$i_m = \frac{20\%}{2}$$

$$\therefore\ i_m = 10\% \text{ a.s.}$$

12. A quantia de Cr$ 1.500,00 foi aplicada à taxa de juros de 42% a.a. pelo prazo de 100 dias. Qual será o juro desta aplicação se for considerado:

a) juro comercial?

b) juro exato?

*Resolução:*

a) *Juro comercial:*

Por convenção, o ano comercial tem 360 dias. Então:

$C = 1.500$

$i = 42\%$ a.a.

$n = 100$ dias

$$J_c = \frac{Cin}{360}$$

$$J_c = \frac{1.500 \times 0{,}42 \times 100}{360}$$

$$J_c = \frac{63.000}{360} = \text{Cr\$ } 175,00$$

b) *Juro exato:*

No juro exato consideramos o ano civil, portanto, o prazo de 365 dias ou 366 dias no caso de ano bissexto. Supondo que o ano não seja bissexto, teremos neste problema:

$C = 1.500$

$i = 42\%$ a.a.

$n = 100$ dias

$$J_e = \frac{Cin}{365}$$

$$J_e = \frac{1.500 \times 0,42 \times 100}{365}$$

$$J_e = \frac{63.000}{365} = \text{Cr\$ } 172,60$$

13. Um capital de Cr$ 2.500,00 foi aplicado à taxa de 25% a.a. em 12 de fevereiro de 1975. Se o resgate for efetuado em 3 de maio de 1975, qual será o juro comercial recebido pelo aplicador?

*Resolução:*

Utilizando-se da tabela de contagem de dias (ver Apêndice de Tabelas), calculamos o número exato de dias entre as datas:

$$\begin{array}{rr} 03/05 = & 123 \\ 12/02 = & 43 \\ \hline & 80 \end{array} -$$

Então:

$C = 2.500$

$i = 25\%$ a.a.

$n = 80$ dias

$$J_c = \frac{Cin}{360}$$

$$J_c = \frac{2.500 \times 0,25 \times 80}{360}$$

$$J_c = \frac{50.000}{360} = \text{Cr\$ } 138,89$$



14. Um capital de Cr$ 5.000,00 rendeu Cr$ 625,00 de juro. Sabendo-se que a taxa de juros contratada foi de 30% a.a. e que a aplicação foi feita dia 18 de março de 1976, pergunta-se qual foi a data de vencimento, se:

a) considerou-se juro comercial;

b) considerou-se juro exato.

*Resolução:*

Devemos inicialmente calcular o número de dias em que o capital ficou aplicado, para depois encontrar qual foi a data de vencimento.

a) *Juro comercial:*

$C = 5.000$

$i = 30\%$ a.a.

$J_c = 625$

$$J_c = \frac{Cin}{360}$$

$$625 = \frac{5.000\,(0,30)\,n}{360}$$

$$625 = \frac{1.500n}{360}$$

$$n = \frac{625 \times 360}{1.500} = 150 \text{ dias}$$

Para o cálculo da data de vencimento, recorremos à tabela de contagem de dias. A data da aplicação, 18/03, é igual ao fator 77. Somando este fator com o número de dias da aplicação (150 dias), temos o fator 227.

$$\begin{array}{rr} 18/03 = & 77 \\ & 150 \\ \hline & 227 \end{array} +$$

Procurando no corpo da tabela, vemos que o fator 227 corresponde a 15 de agosto. Portanto, a data 15 de agosto de 1976 corresponde à data de vencimento, na hipótese de juro comercial.

b) *Juro exato:*

$C = 5.000$

$i = 30\%$ a.a.

$J_e = 625$

$$J_e = \frac{Cin}{365}$$

$$625 = \frac{5.000\ (0{,}30)\ n}{365}$$

$$625 = \frac{1.500n}{365}$$

$$n = \frac{625 \times 365}{1.500} \cong 152 \text{ dias}$$

Calculando a data de vencimento, vem:

$$18/03 = \begin{array}{r} 77 \\ \underline{152} \\ 229 \end{array} +$$

O fator 229 corresponde a 17 de agosto, sendo, por conseguinte, esta a data de vencimento se for considerado juro exato.

15. Qual é o valor nominal de uma Nota Promissória de Cr$ 7.575,76, assinada hoje com vencimento daqui a 10 meses, se a taxa de aplicação for de 38,4% a.a.?

*Resolução:*

Neste problema temos de calcular o valor nominal ($N$) da Nota Promissória. Ora, o valor nominal nada mais é do que o montante do valor aplicado; portanto:

$$N = V(1 + in)$$

onde: $N$ = valor nominal
$V$ = valor aplicado (valor atual)
$i$ = taxa de juros por períodos
$n$ = número de períodos até a data de vencimento

Então:

$V = 7.575{,}76$

$i = 38{,}4\%$ a.a.

$n = 10$ meses

$$N = V(1 + in)$$

$$N = 7.575{,}76 \left(1 + 0{,}384 \times \frac{10}{12}\right)$$



$$N = 7.575{,}76\ (1 + 0{,}32)$$

$$N = 7.575{,}76\ (1{,}32) = \text{Cr\$ } 10.000{,}00$$

16. O valor nominal de uma Nota Promissória é de Cr$ 4.770,00. Qual é seu valor atual 3 meses antes do vencimento, considerando-se a taxa de juros de 24% a.a.?

*Resolução:*

$N = 4.770$

$i = 24\%$ a.a.

$n = 3$ meses

$$N = V(1 + in)$$

$$4.770 = V \left(1 + 0{,}24 \times \frac{3}{12}\right)$$

$$4.770 = V\ (1 + 0{,}06)$$

$$V = \frac{4.770}{1{,}06} = \text{Cr\$ } 4.500{,}00$$

17. Certa pessoa aplicou Cr$ 10.000,00 à taxa de 29% a.a. pelo prazo de 9 meses. Dois meses antes da data de vencimento, esta pessoa propôs a transferência da aplicação a um amigo. Quanto deverá ser pago pelo título, se a taxa de juros de mercado for de 32% a.a. na ocasião da transferência?

*Resolução:*

Inicialmente vamos calcular o valor nominal do título em seu vencimento:

$V = 10.000$

$i = 29\%$ a.a.

$n = 9$ meses

$$N = V(1 + in)$$

$$N = 10.000 \left(1 + 0{,}29 \times \frac{9}{12}\right)$$

$$N = 10.000\ (1{,}2175) = \text{Cr\$ } 12.175{,}00$$

Portanto, se o aplicador aguardasse o vencimento do título, ele receberia Cr$ 12.175,00. Entretanto, como quer resgatar o título antes, receberá apenas o valor atual do título, considerando a taxa vigente no mercado financeiro, por ocasião da transferência. Isto porque o comprador pagará

pelo título um valor que lhe garanta, no mínimo, a rentabilidade do mercado.

Portanto:

$N = 12.175$

$i = 32\%$ a.a. (pois esta é a taxa que pode ser ganha no mercado)

$n = 2$ meses (prazo de aplicação para o comprador)

$$N = V(1 + in)$$

$$12.175 = V\left(1 + 0{,}32 \times \frac{2}{12}\right)$$

$$V = \frac{12.175}{1{,}05333} = \text{Cr\$ } 11.558{,}58$$

O título será transferido por Cr$ 11.558,58, valor este que garantirá ao comprador uma rentabilidade de 32% a.a.

## 11. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcular a taxa quadrimestral proporcional às seguintes taxas:
   a) 21% a.a.
   b) 33% ao biênio.
   c) 10% a cada cinco meses.

2. Determinar a taxa proporcional referente a 5 meses, dadas as taxas seguintes:
   a) 1% a.m.
   b) 2,5% ao bimestre.
   c) 12% a.s.

3. Calcular o juro simples e o montante de:
   a) Cr$ 500,00 a 25% a.a. por 8 meses.
   b) Cr$ 2.200,00 a 30,2% a.a. por 2 anos e 5 meses.
   c) Cr$ 3.000,00 a 34% a.a. por 19 meses.

4. Qual é a taxa de juro que, de um capital de Cr$ 1.200,00, gera um montante de:
   a) Cr$ 1.998,00 em 3 anos e 2 meses.
   b) Cr$ 1.470,00 em 10 meses.
   c) Cr$ 2.064,00 em 1 ano e 8 meses.

5. Qual é o capital que rende:
   a) Cr$ 150,00 a 18% a.a. em 10 meses.
   b) Cr$ 648,00 a 21,6% a.a. em 2 anos e 6 meses.
   c) Cr$ 1.500,00 a 30% a.a. em 3 anos e 4 meses.

6. Em quanto tempo um capital de Cr$ 10.000,00 aplicado a 26,4% a.a.
   a) renderá Cr$ 4.620,00.
   b) elevar-se-á a Cr$ 16.160,00.



7. Qual é a taxa bimestral equivalente a 28,2% a.a.?

8. Assinalar as proposições corretas:
   a) 1% ao mês equivale a 12% ao ano.
   b) 2,25% ao bimestre equivale a 26,80% ao biênio.
   c) 3,4% ao trimestre equivale a 13,6% ao ano.
   d) 50% ao ano equivale a 20% em 5 meses.

9. Calcular o juro simples comercial e o exato das seguintes propostas:
   a) Cr$ 800,00 a 20% a.a. por 90 dias.
   b) Cr$ 1.100,00 a 27% a.a. por 135 dias.
   c) Cr$ 2.800,00 a 30% a.a. por 222 dias.

10. Qual é o valor nominal e a data de vencimento de cada um dos compromissos abaixo (juro comercial):
    a) Cr$ 1.000,00 em 12/02 para 90 dias a 26% a.a.
    b) Cr$ 1.500,00 em 20/04 para 180 dias a 28% a.a.
    c) Cr$ 2.400,00 em 06/01 para 8 meses a 30% a.a.
    d) Cr$ 3.500,00 em 30/05 para 65 dias a 24% a.a.

11. Se tenho um título com valor nominal de Cr$ 15.000,00 com vencimento daqui a 2 anos e a taxa de juros correntes é de 28% a.a., qual o valor atual deste título nas seguintes datas:
    a) Hoje.
    b) Daqui a 1 ano.
    c) 4 meses antes de seu vencimento.

12. O valor nominal de um título é igual ao dobro de seu valor de face (valor da aplicação). Sabendo-se que a taxa de juros corrente é de 12,5% a.a., qual é o prazo da aplicação?

13. Se o valor atual for igual a 2/3 do valor nominal e o prazo de aplicação for de 2 anos, qual será a taxa de juros considerada?

14. Uma loja oferece um relógio por Cr$ 3.000,00 a vista ou por 20% do valor a vista como entrada e mais um pagamento de Cr$ 2.760,00 após 6 meses. Qual é a taxa de juros cobrada?

15. João emprestou Cr$ 20.000,00 de Carlos para pagá-lo após 2 anos. A taxa ajustada foi de 30% a.a.

    Quanto Carlos poderia aceitar, se 6 meses antes do vencimento da dívida João quisesse resgatá-la e se nesta época o dinheiro valesse 25% a.a.?

16. João tomou emprestado certa quantia de Carlos à taxa de 28,8% a.a. Sabendo-se que João pagou Cr$ 2.061,42 para Carlos, saldando a dívida 2 meses antes de seu vencimento e que nesta época a taxa corrente de mercado era de 25,2% a.a., quanto João tomou emprestado e qual era o prazo inicial se os juros previstos montavam Cr$ 648,00?

**Respostas**

1. a) 7% a.q.
   b) 5,5% a.q.
   c) 8% a.q.
2. a) 5%
   b) 6,25%
   c) 10%
3. a) Cr$ 83,33; Cr$ 583,33
   b) Cr$ 1.605,63; Cr$ 3.805,63
   c) Cr$ 1.615,00; Cr$ 4.615,00
4. a) 21% a.a.
   b) 27% a.a.
   c) 43,2% a.a.
5. a) Cr$ 1.000,00
   b) Cr$ 1.200,00
   c) Cr$ 1.500,00
6. a) 21 meses
   b) 28 meses
7. 4,7% ao bimestre
8. a) e c)
9. a) Cr$ 40,00; Cr$ 39,45
   b) Cr$ 111,37; Cr$ 109,85
   c) Cr$ 518,00; Cr$ 510,90
10. a) Cr$ 1.065,00 vencendo em 13/05
    b) Cr$ 1.710,00 vencendo em 17/10
    c) Cr$ 2.880,00 vencendo em 03/09
    d) Cr$ 3.651,66 vencendo em 03/08
11. a) Cr$ 9.615,38
    b) Cr$ 11.718,75
    c) Cr$ 13.719,52
12. 8 anos
13. 25% a.a.
14. 30% a.a.
15. Cr$ 28.444,44
16. Cr$ 1.500,00; 18 meses



# 2
# Descontos

Quando se faz uma aplicação de capital com vencimento predeterminado, obtém-se um comprovante de aplicação que pode ser, por exemplo, uma nota promissória ou uma letra de câmbio.

Caso o aplicador precise do dinheiro antes de vencer o prazo de aplicação, deve voltar à instituição captadora, transferir a posse do título e levantar o principal e os juros já ganhos.

Uma outra situação diz respeito a uma empresa que faça uma venda a prazo, recebendo uma duplicata com vencimento determinado. Se a empresa precisar do dinheiro para suas operações, pode ir a um banco e transferir a posse da duplicata, recebendo dinheiro em troca.

As operações citadas são chamadas "de desconto" e o ato de efetuá-las é chamado de "descontar um título".

## 1. DESCONTO RACIONAL OU DESCONTO "POR DENTRO"

*Definição:* é o desconto obtido pela diferença entre o *valor nominal* e o *valor atual* de um compromisso que seja saldado *n* períodos antes do seu vencimento.

*Desconto:* é a quantia a ser abatida do valor nominal.

*Valor descontado:* é a diferença entre o valor nominal e o desconto.

Sendo:

$N$ : valor nominal (ou montante)

$V_r$ : valor atual (ou valor descontado racional)

$n$ : número de períodos antes do vencimento

$i$ : taxa de desconto

$D_r$ : valor do desconto

Temos:

$$V = \frac{N}{1 + in}$$

Tem-se:

$$D_r = N - V$$

$$D_r = N - \frac{N}{1 + in}$$

$$D_r = \frac{N(1 + in) - N}{1 + in}$$

$$\boxed{D_r = \frac{Nin}{1 + in}} \qquad (7)$$

Esta fórmula permite que seja obtido o *valor do desconto* racional, calculado para um dado valor nominal ($N$), a uma taxa de juros ($i$) e para um dado prazo de antecipação ($n$).

O *valor descontado*, de acordo com a definição, é dado por:

$$V_r = N - D_r$$

$$V_r = N - \frac{Nin}{1 + in}$$

$$V_r = \frac{N(1 + in) - Nin}{1 + in}$$

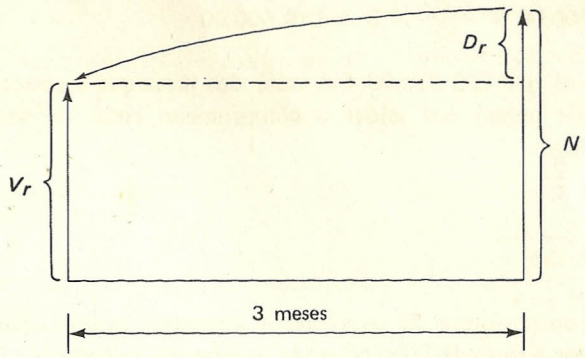
$$\boxed{V_r = \frac{N}{1 + in}}$$

Observe-se que, em juros simples, o *valor descontado* é o próprio *valor atual.*



*Exemplo:* Uma pessoa pretende saldar um título de Cr$ 5.500,00, 3 meses antes de seu vencimento. Sabendo-se que a taxa de juros corrente é de 40% a.a., qual o desconto e quanto vai obter?

*Resolução:*




Temos:

$N = 5.500,00$

$n = 3$ meses

Calculando a taxa proporcional a 1 mês:

$$i_{12} = \frac{0,40}{12}$$

Podemos calcular:

a) *O desconto:*

$$D_r = \frac{Nin}{1 + in}$$

$$D_r = \frac{5.500,00 \times \frac{0,40}{12} \times 3}{1 + \frac{0,40}{12} \times 3}$$

$$D_r = \frac{5.500,00 \times 0,10}{1 + 0,10}$$

$$D_r = \frac{550,00}{1,10} = \text{Cr\$ } 500,00$$

b) *O valor descontado:*

$V_r = 5.500,00 - 500,00 = \text{Cr\$ } 5.000,00$

Cr$ 5.000,00 é o próprio *valor atual* do compromisso. De fato, nos próximos 3 meses e à taxa de 40% a.a., a aplicação de Cr$ 5.000,00 iria render:

$$J = Cin$$

$$J = 5.000{,}00 \times \frac{0{,}40}{12} \times 3 = \text{Cr\$ } 500{,}00$$

Observe-se que Cr$ 500,00 é o valor dos juros que a pessoa deixa de receber (ou de pagar) por saldar o compromisso antes do vencimento. Em forma literal:

$$D_r = J$$

$$\boxed{D_r = Cin} \qquad (7')$$

Esta é outra forma de expressar o desconto racional. Note-se que podemos chegar à fórmula (7') utilizando a definição inicial:

$$D_r = N - V_r$$

Substituindo $N$ e $V_r$:

$$D_r = C(1 + in) - C$$

$$D_r = C + Cin - C$$

$$D_r = Cin$$

*Conclusão:* No regime de *juros simples*, o desconto racional aplicado ao valor nominal é igual ao juro devido sobre o capital (valor descontado) desde que ambos sejam calculados à mesma taxa. Ou seja, a *taxa de juros da operação* é também a *taxa de desconto.*

## 2. DESCONTO COMERCIAL OU DESCONTO "POR FORA"

*Definição:* é aquele valor que se obtém pelo cálculo do *juro simples* sobre o *valor nominal* do compromisso que seja saldado $n$ períodos antes de seu vencimento.

**Nota:** Valem as observações do item anterior sobre o significado de *desconto* e de *valor descontado.*

$N$ : valor nominal (ou montante)

$n$ : número de períodos antes do vencimento

$i$ : taxa de desconto



$D_c$ : desconto comercial

$V_c$ : valor atual (ou valor descontado comercial)

Obtém-se o valor do *desconto comercial* aplicando-se a definição:

$$\boxed{D_c = Nin} \qquad (8)$$

E o *valor descontado comercial:*

$$V_c = N - D_c$$

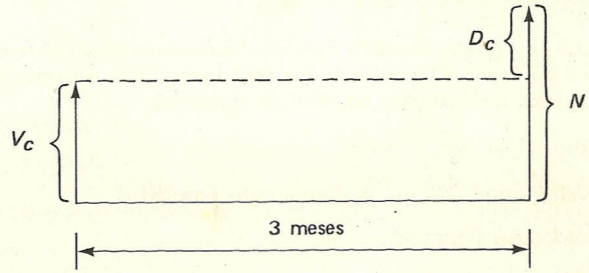
$$V_c = N - Nin$$

$$\boxed{V_c = N(1 - in)} \qquad (9)$$

Este resultado é também chamado *valor atual comercial.*

*Exemplo:* Consideremos o exemplo do item anterior, em que o título de Cr$ 5.500,00 é descontado à taxa de 40% a.a., 3 meses antes do vencimento.

*Resolução:* procedendo de modo análogo, temos:




a) *O desconto comercial:*

$$D_c = Nin$$

$$D_c = 5.500{,}00 \times \frac{0{,}40}{12} \times 3 = \text{Cr\$ } 550{,}00$$

b) *O valor descontado comercial:*

$$V_c = N(1 - in)$$

$$V_c = 5.500{,}00 \times \left(1 - \frac{0{,}40}{12} \times 3\right)$$

$$V_c = 5.500{,}00 \times 0{,}9$$

$$V_c = \text{Cr\$ } 4.950{,}00$$

Então a pessoa vai receber Cr$ 4.950,00 pelo desconto comercial, que é *menos* que os Cr$ 5.000,00 que receberia se o desconto fosse racional.

É evidente, portanto, que ao se fazer um *desconto comercial* a taxa de desconto utilizada não é mais igual à taxa de juros simples capaz de reproduzir o montante. Observe-se que, se o banco ganha Cr$ 550,00 sobre um valor de Cr$ 4.950,00, em 3 meses, a taxa de juros da operação é:

$$i' = \frac{550{,}00}{4.950{,}00} = 0{,}1111 \text{ ao trimestre}$$

ou

$$i' \simeq 0{,}44 \text{ ao ano.}$$

Note-se então que, no *desconto comercial*, é preciso distinguir entre a *taxa de desconto* utilizada na operação e a *taxa implícita* que é cobrada de fato.

## 2.1. Desconto bancário

*Definição:* corresponde ao *desconto comercial* acrescido de uma taxa prefixada, cobrada sobre o valor nominal.

**Nota:** Esta *taxa de despesas bancárias* é referida freqüentemente como sendo as despesas administrativas do banco ou instituição que faz a operação. O desconto bancário pode ser entendido como uma extensão do desconto comercial.

Sendo:

$V_b$: valor atual (ou valor descontado bancário)

$D_b$: desconto bancário

$D_c$: desconto comercial

$h$ : taxa de despesas administrativas

$N$ : valor nominal (ou montante)

$n$ : número de períodos antes do vencimento

$i$ : taxa de desconto

Tem-se o valor do *desconto bancário:*

$$D_b = D_c + Nh$$

$$D_b = Nin + Nh$$

$$\boxed{D_b = N(in + h)} \qquad (10)$$



E o valor *descontado bancário:*

$$V_b = N - D_b$$

$$V_b = N - N(in + h)$$

$$\boxed{V_b = N\,[1 - (in + h)]} \qquad (11)$$

*Exemplo:* Um título de Cr$ 5.500,00 foi descontado no Banco X, que cobra 2% como despesa administrativa. Sabendo-se que o título foi descontado 3 meses antes de seu vencimento e que a taxa corrente em desconto comercial é de 40% a.a., qual o desconto bancário? Quanto recebeu o proprietário do título?

*Resolução:*

Lembrando que:

$$h = 0{,}02$$

e procedendo de modo análogo ao exemplo anterior:

a) *Desconto bancário:*

$$D_b = N(in + h)$$

$$D_b = 5.500{,}00\left(\frac{0{,}40}{12} \times 3 + 0{,}02\right)$$

$$D_b = 5.500{,}00\,(0{,}10 + 0{,}02)$$

$$D_b = 5.500{,}00 \times 0{,}12$$

$$D_b = \text{Cr\$ } 660{,}00$$

b) *Valor descontado bancário:*

$$V_b = N[1 - (in + h)]$$

$$V_b = 5.500{,}00\left[1 - \left(\frac{0{,}40}{12} \times 3 + 0{,}02\right)\right]$$

$$V_b = 5.500{,}00\,[1 - (0{,}10 + 0{,}02)]$$

$$V_b = 5.500{,}00 \times 0{,}88$$

$$V_b = \text{Cr\$ } 4.840{,}00$$

Compare-se este valor que o proprietário recebeu ao descontar seu título 3 meses antes com aquele obtido via *desconto racional* (Cr$ 5.000,00) e via *desconto comercial* (Cr$ 4.950,00). Mais uma vez notamos que a taxa de desconto não corresponde à taxa implícita na operação:

$$i'' = \frac{660{,}00}{4.840{,}00} \cong 0{,}1364 \text{ a.t.}$$

ou

$i'' \cong 0{,}5456$ ao ano.

É preciso, portanto, no caso dos descontos *comercial* e *bancário*, calcular a taxa que realmente está sendo cobrada na operação.

## 3. TAXA DE JUROS EFETIVA

*Definição:* é a taxa de juros que aplicada sobre o valor descontado, comercial ou bancário gera no período considerado um montante igual ao valor nominal.

Sendo:

$i_f$ : taxa efetiva

$V_c$ : valor atual comercial (ver fórmula (9))

$V_b$ : valor atual bancário (ver fórmula (11))

$n$ : número de períodos antes do vencimento

Usando a definição dada, temos:

a) *Taxa efetiva para desconto comercial:*

$$N = V_c(1 + i_f \cdot n)$$

$$\frac{N}{V_c} = 1 + i_f \cdot n$$

$$i_f \cdot n = \frac{N}{V_c} - 1$$

$$\boxed{i_f = \frac{\frac{N}{V_c} - 1}{n}} \qquad (12)$$

*Exemplo:* Seja o mesmo exemplo dado no item 2, no qual já calculamos:

$V_c = 4.950{,}00$

$N = 5.500{,}00$

$n = 3$

Aplicando diretamente a fórmula (12), temos:

$$i_f = \frac{\frac{N}{V_c} - 1}{n}$$



$$i_f = \frac{\frac{5.500{,}00}{4.950{,}00} - 1}{3}$$

$$i_f = \frac{1{,}1111 - 1}{3}$$

$$i_f = 0{,}03703 \text{ a.m.}$$

ou

$i_f \cong 0{,}44$ a.a.

Observe-se que este é o mesmo resultado já obtido anteriormente, por cálculo direto.

b) *Taxa efetiva para desconto bancário:*

De modo análogo, temos:

$$N = V_b(1 + i_f \cdot n)$$

$$\frac{N}{V_b} = 1 + i_f \cdot n$$

$$i_f \cdot n = \frac{N}{V_b} - 1$$

$$\boxed{i_f = \frac{\frac{N}{V_b} - 1}{n}} \qquad (12')$$

Esta fórmula é idêntica à anterior, desde que substituído o valor atual comercial pelo valor atual bancário.

*Exemplo:* O mesmo do item 2.1, para o qual já calculamos:

$V_b = 4.840{,}00$

$N = 5.500{,}00$

$n = 3$

Temos:

$$i_f = \frac{\frac{N}{V_b} - 1}{n}$$

$$i_f = \frac{\frac{5.500{,}00}{4.840{,}00} - 1}{3}$$

$$i_f = \frac{1{,}1364 - 1}{3}$$

$$i_f = \frac{0{,}1364}{3}$$

$$i_f \cong 0{,}045 \text{ a.m.}$$

ou

$$i_f \cong 0{,}54 \text{ a.a.}$$

Verifique-se mais uma vez que o resultado é o mesmo que o obtido anteriormente por raciocínio direto.

**Nota:** Como já observamos, no desconto racional a taxa de desconto é a própria taxa efetiva. Isto resulta do fato de ser o desconto racional derivado de considerações de convenção matemática e não financeira, como é o caso dos descontos comercial e bancário. Nestas condições, um método mais simples para o cálculo da taxa efetiva, porém não tão intuitivo, é o raciocínio via desconto racional.

A *taxa efetiva* será aquela que conduz, pelo *desconto racional*, ao mesmo valor calculado pelo desconto comercial ou bancário.

A demonstração pode ser feita considerando os descontos racional e comercial, por exemplo:

$$D_r = \frac{N i_f \cdot n}{1 + i_f \cdot n}$$

$$D_c = Nin$$

Já que os dois descontos devem ser iguais:

$$D_r = D_c$$

$$\frac{N i_f \cdot n}{1 + i_f \cdot n} = Nin$$

$$\frac{i_f}{1 + i_f \cdot n} = i$$

ou

$$\boxed{i_f = \frac{i}{1 - in}} \qquad (13)$$

onde "$i$" é a taxa de desconto aplicada.

*Exemplo:* Consideremos de novo o exemplo do item 2 em que:

$$i = 0{,}40 \text{ a.a.} \quad \text{ou} \quad i = \frac{0{,}40}{12} \text{ a.m.}$$

$$n = 3 \text{ meses}$$

Temos:

$$i_f = \frac{i}{1 - in}$$



$$i_f = \frac{\frac{0{,}40}{12}}{1 - \frac{0{,}40}{12} \times 3}$$

$$i_f = \frac{0{,}0333}{1 - 0{,}10}$$

$$i_f = \frac{0{,}0333}{0{,}9}$$

$$i_f \cong 0{,}037 \text{ a.m.}$$

ou

$$i_f \cong 0{,}44 \text{ a.a.}$$

A mesma fórmula (13) pode ser utilizada para se calcular a taxa efetiva no caso de desconto bancário. O único cuidado que se exige é calcular a *taxa proporcional* correspondente às despesas administrativas ($h$), colocando-a na mesma unidade de tempo da taxa de desconto.

*Exemplo:* Utilizando o caso do exemplo 2.1, tem-se:

$$i = 0{,}40 \text{ a.a.} \quad \text{ou} \quad i_m = 0{,}0333 \text{ a.m.}$$

$$n = 3 \text{ meses}$$

$$h = 2\%$$

ou

$$h_m = \frac{2\%}{3} \cong 0{,}67\% \text{ a.m.}$$

ou ainda:

$$h_m \cong 0{,}0067 \text{ a.m.}$$

Portanto, a *taxa de desconto bancário* agora é:

$$i' = i_m + h_m$$

$$i' = 0{,}0333 + 0{,}0067$$

ou

$$i' = 0{,}0400$$

$$i_f = \frac{i'}{1 - i'n}$$

$$i_f = \frac{0{,}04}{1 - 0{,}04 \times 3}$$

$$i_f = \frac{0{,}04}{1 - 0{,}12}$$

$$i_f = \frac{0{,}04}{0{,}88}$$

$i_f \cong 0{,}045$ a.m.

ou

$i_f \cong 0{,}54$ a.a.

## 4. RELAÇÃO ENTRE DESCONTO RACIONAL E COMERCIAL

Já verificamos empiricamente que o desconto comercial é *maior* que o desconto racional feito nas mesmas condições. Ou seja:

$$D_c > D_r$$

Vamos examinar agora qual a relação existente entre os dois descontos:

$$D_r = \frac{Nin}{1 + in} \qquad (7)$$

$$D_c = Nin \qquad (8)$$

Fazendo a divisão de (8) por (7), membro a membro:

$$\frac{D_c}{D_r} = \frac{Nin}{\frac{Nin}{1 + in}}$$

Portanto:

$$\frac{D_c}{D_r} = 1 + in$$

ou ainda:

$$\boxed{D_c = D_r(1 + in)} \qquad (14)$$

Ou seja, o *desconto comercial* pode ser entendido como sendo o montante do desconto racional calculado para o mesmo período e à mesma taxa.

*Exemplo:* O desconto comercial de um título descontado 3 meses antes de seu vencimento e à taxa de 40% a.a. é de Cr$ 550,00. Qual é o desconto racional?

*Resolução:* aplicando diretamente a fórmula (14):

$$D_c = D_r(1 + in)$$

$$550{,}00 = D_r\left(1 + \frac{0{,}40}{12} \times 3\right)$$

$$550{,}00 = D_r(1 + 0{,}10)$$



$$D_r = \frac{550{,}00}{1{,}10}$$

$$D_r = \text{Cr\$ } 500{,}00$$

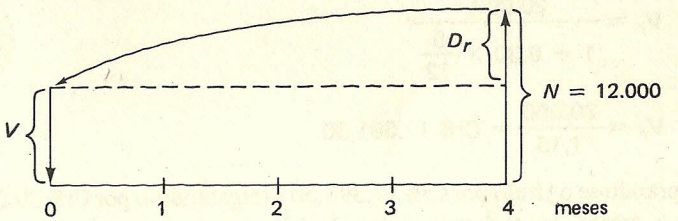
Volte aos exercícios apresentados nos itens 1 e 2 para comparar o resultado obtido!

## 5. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Uma dívida de Cr$ 12.000,00 será saldada 4 meses antes de seu vencimento. Que desconto racional será obtido, se a taxa de juros contratada for de 27% a.a.?

*Resolução:*

Graficamente temos a seguinte situação:




Portanto:

$N = 12.000$ (valor nominal do compromisso em sua data de vencimento)

$i = 27\%$ a.a.

$n = 4$ meses (número de períodos de antecipação)

$$D_r = \frac{Nin}{1 + in}$$

$$D_r = \frac{12.000 \times \frac{0{,}27}{12} \times 4}{1 + \frac{0{,}27}{12} \times 4}$$

$$D_r = \frac{12.000 \times 0{,}09}{1 + 0{,}09}$$

$$D_r = \frac{1.080}{1{,}09} = \text{Cr\$ } 990{,}83$$

Cr$ 990,83 é, portanto, o desconto racional obtido pelo resgate antecipado da dívida.

2. Por quanto posso comprar um título com vencimento daqui a 6 meses, se seu valor nominal for de Cr$ 20.000,00 e eu quiser ganhar 30% ao ano?

*Resolução:*

Deve-se calcular o valor atual do título tal que seja possível obter a rentabilidade de 30% a.a.

$N = 20.000$

$i = 30\%$ a.a.

$n = 6$ meses

$$V_r = \frac{N}{1 + in}$$

$$V_r = \frac{20.000}{1 + 0{,}30 \times \frac{6}{12}}$$

$$V_r = \frac{20.000}{1{,}15} = \text{Cr\$ } 17.391{,}30$$

Comprando-se o título por Cr$ 17.391,30 e resgatando-o por Cr$ 20.000,00 após 6 meses, ter-se-á um ganho de 15% em 6 meses, taxa esta que é equivalente a 30% a.a.

3. Determinar o desconto racional em cada uma das hipóteses abaixo, adotando-se o ano comercial:

| | Valor Nominal | Taxa de Juros | Prazo de Antecipação |
|---|---|---|---|
| a) | Cr$ 15.000,00 | 25% a.a. | 8 meses |
| b) | Cr$ 3.000,00 | 20% a.a. | 150 dias |
| c) | Cr$ 5.000,00 | 32% a.a. | 25 dias |
| d) | Cr$ 6.000,00 | 28% a.a. | 9 meses e 15 dias |

*Resolução:*

Aplicando-se a fórmula do desconto racional, teremos em cada hipótese:

a) $N = 15.000$

$i = 25\%$ a.a.

$n = 8$ meses



$$D_r = \frac{Nin}{1 + in}$$

$$D_r = \frac{15.000\ (0{,}25)\ \frac{8}{12}}{1 + (0{,}25)\ \frac{8}{12}}$$

$$D_r = \frac{2.500}{1{,}166667} = \text{Cr\$ } 2.142{,}86$$

b) $N = 3.000$

$i = 20\%$ a.a.

$n = 150$ dias

$$D_r = \frac{Nin}{1 + in}$$

$$D_r = \frac{3.000\ (0{,}20)\ \frac{150}{360}}{1 + (0{,}20)\ \frac{150}{360}}$$

$$D_r = \frac{250}{1{,}083333} = \text{Cr\$ } 230{,}77$$

Nota: Se tivéssemos considerado o período de antecipação em termos de meses, teríamos chegado ao mesmo resultado, uma vez que: $\frac{5}{12} = \frac{150}{360}$.

c) $N = 5.000$

$i = 32\%$ a.a.

$n = 25$ dias

$$D_r = \frac{Nin}{1 + in}$$

$$D_r = \frac{5.000\ (0{,}32)\ \frac{25}{360}}{1 + (0{,}32)\ \frac{25}{360}}$$

$$D_r = \frac{111{,}11}{1{,}022222} = \text{Cr\$ } 108{,}69$$

d) $N = 6.000$

$i = 28\%$ a.a.

$n$ = 9 meses e 15 dias ou 285 dias

$$D_r = \frac{Nin}{1 + in}$$

$$D_r = \frac{6.000\ (0{,}28)\ \frac{285}{360}}{1 + (0{,}28)\frac{285}{360}}$$

$$D_r = \frac{1.330}{1{,}221667} = \text{Cr\$ } 1.088{,}68$$

4. Um título de valor nominal Cr$ 10.000,00, com vencimento em 23/09/75, é resgatado em 15/06/75. Qual é o desconto racional se a taxa de juros contratada for de 27% a.a.?

*Resolução:*

Fazendo a contagem exata do número de dias compreendidos entre as duas datas, teremos:

$$\begin{array}{r} 23/09 = 266 \\ 15/06 = 166 \\ \hline 100 \end{array} \quad -$$

(Ver Tabela de Contagem de Dias do Ano Comercial.)

Portanto:

$N$ = 10.000

$i$ = 27% a.a.

$n$ = 100 dias

$$D_r = \frac{Nin}{1 + in}$$

$$D_r = \frac{10.000\ (0{,}27)\ \frac{100}{360}}{1 + (0{,}27)\ \frac{100}{360}}$$

$$D_r = \frac{750}{1{,}075} = \text{Cr\$ } 697{,}67$$

5. Um título de valor nominal Cr$ 5.300,00 foi descontado à taxa de 18% a.a. Sabendo-se que o desconto racional foi de Cr$ 300,00, quanto tempo antes do vencimento efetuou-se o resgate?



*Resolução:*

$N$ = 5.300

$i$ = 18% a.a.

$D_r$ = 300

Sabemos que:

$$D_r = N - V_r$$

donde:

$$V_r = N - D_r$$

portanto:

$$V_r = 5.300 - 300 = \text{Cr\$ } 5.000{,}00$$

Por outro lado, tem-se que:

$$D_r = V_r\, in$$

Então:

$$300 = 5.000\ (0{,}18)\, n$$

$$n = \frac{300}{900} = \frac{1}{3}$$

Como $n$ se refere a período anual, vem:

1 ----- 12 meses

$\frac{1}{3}$ ----- $X$ meses

Portanto:

$$1X = 12 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ X = 4 \text{ meses}$$

**Obs.:** Idêntica solução seria obtida pela fórmula: $D_r = \frac{Nin}{1 + in}$.

6. Uma Nota Promissória de valor nominal Cr$ 8.856,00, com vencimento em 4 meses, foi comprada por Cr$ 8.200,00. Qual é a taxa de desconto racional exigida pelo comprador?

*Resolução:*

$N$ = 8.856

$V_r = 8.200$

$n = 4$ meses

O valor de compra é o valor atual do título 4 meses antes de seu vencimento. Portanto:

$$D_r = N - V_r$$

$$D_r = 8.856 - 8.200 = \text{Cr\$ } 656{,}00$$

A taxa de desconto anual pode, então, ser encontrada por:

$$D_r = V_r in$$

$$656 = 8.200 i \frac{4}{12}$$

$$i = \frac{656 \times 12}{8.200 \times 4}$$

$$i = \frac{7.872}{32.800}$$

$$\therefore\ i = 0{,}24 \quad \text{ou} \quad i = 24\%\ \text{a.a.}$$

Outro modo de se calcular a taxa de desconto é através de:

$$N = V_r(1 + in)$$

$$8.856 = 8.200 \left(1 + i \frac{4}{12}\right)$$

$$\frac{8.856}{8.200} = 1 + i \frac{4}{12}$$

$$1{,}08 = 1 + i \frac{1}{3}$$

$$0{,}08 = \frac{i}{3}$$

$$i = (0{,}08)3$$

$$\therefore\ i = 0{,}24 \quad \text{ou} \quad i = 24\%\ \text{a.a.}$$

7. O desconto racional de um título, vencendo a 216 dias, é igual a Cr$ 1.437,50. Qual seria seu valor nominal se a taxa de juros adotada fosse de 30% a.a.?

*Resolução:*

$D_r = 1.437{,}50$

$i = 30\%$ a.a.



$n = 216$ dias

$$D_r = \frac{Nin}{1 + in}$$

$$1.437{,}50 = \frac{N(0{,}30)\frac{216}{360}}{1 + (0{,}30)\frac{216}{360}}$$

$$1.437{,}50 = \frac{N(0{,}18)}{1{,}18}$$

$$N = \frac{1.437{,}50\,(1{,}18)}{0{,}18} = \text{Cr\$ } 9.423{,}61$$

8. Determinar o desconto comercial em cada uma das hipóteses abaixo:

| | Valor Nominal | Taxa de Juros | Prazo de Antecipação |
|---|---|---|---|
| a) | Cr$ 15.000,00 | 25% a.a. | 8 meses |
| b) | Cr$ 3.000,00 | 20% a.a. | 150 dias |
| c) | Cr$ 5.000,00 | 32% a.a. | 25 dias |
| d) | Cr$ 6.000,00 | 28% a.a. | 9 meses e 15 dias |

*Resolução:*

a) $N = 15.000$

$i = 25\%$ a.a.

$n = 8$ meses

O desconto comercial ($D_c$) será:

$$D_c = Nin$$

$$D_c = 15.000\,(0{,}25)\frac{8}{12}$$

$$D_c = 15.000\,(0{,}166667) = \text{Cr\$ } 2.500{,}00$$

b) $N = 3.000$

$i = 20\%$ a.a.

$n = 150$ dias

$$D_c = Nin$$

$$D_c = 3.000\,(0{,}20)\frac{150}{360}$$

$$D_c = 3.000\,(0{,}083333) = \text{Cr\$ } 250{,}00$$

c) $N = 5.000$

$i = 32\%$ a.a.

$n = 25$ dias

$$D_c = Nin$$

$$D_c = 5.000\,(0{,}32)\,\frac{25}{360}$$

$$D_c = 5.000\,(0{,}022222) = \text{Cr\$ } 111{,}11$$

d) $N = 6.000$

$i = 28\%$ a.a.

$n = 9$ meses e 15 dias ou 285 dias

$$D_c = Nin$$

$$D_c = 6.000\,(0{,}28)\,\frac{285}{360}$$

$$D_c = 6.000\,(0{,}221667) = \text{Cr\$ } 1.330{,}00$$

**Nota:** Comparar os resultados deste problema com os do problema nº 3.

9. Uma Nota Promissória, no valor de Cr$ 10.000,00 em seu vencimento, foi descontada 2 meses antes de seu prazo de resgate. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial era de 28% a.a., qual foi o desconto? Qual foi o valor atual comercial?

*Resolução:*

$N = 10.000$

$i = 28\%$ a.a.

$n = 2$ meses

$$D_c = Nin$$

$$D_c = 10.000\,(0{,}28)\,\frac{2}{12}$$

$$D_c = 10.000\,(0{,}046667) = \text{Cr\$ } 466{,}67$$

Como já foi calculado o desconto comercial, o valor atual comercial ($V_c$) pode ser obtido por diferença:

$$V_c = N - D_c$$

$$V_c = 10.000 - 466{,}67 = \text{Cr\$ } 9.533{,}33$$



Caso nos interessasse apenas o valor atual comercial, poderíamos calculá-lo diretamente por:

$$V_c = N(1 - in)$$

$$V_c = 10.000\left[1 - (0{,}28)\,\frac{2}{12}\right]$$

$$V_c = 10.000\,(1 - 0{,}046667)$$

$$V_c = 10.000\,(0{,}953333) = \text{Cr\$ } 9.533{,}33$$

10. O desconto comercial de um título foi de Cr$ 750,00, adotando-se uma taxa de juros de 30% a.a. Quanto tempo faltaria para o vencimento do título, se seu valor nominal fosse de Cr$ 20.000,00?

*Resolução:*

$N = 20.000$

$i = 30\%$ a.a.

$D_c = 750$

$$D_c = Nin$$

$$750 = 20.000\,(0{,}30)\,n$$

$$750 = 6.000\,n$$

$$n = \frac{750}{6.000} = 0{,}125 \text{ anos}$$

Em termos de dias, teremos:

$$1 \text{ ------- } 360 \text{ dias}$$

$$0{,}125 \text{ ------- } X \text{ dias}$$

Então:

$$1X = (0{,}125)\,360$$

$$\therefore\ X = 45 \text{ dias}$$

11. Um título a vencer no dia 15/10/75 foi descontado no dia 20/08/75. Se o desconto comercial fosse de Cr$ 1.470,00 e a taxa de juros fosse de 27% a.a., qual seria o valor nominal deste título?

*Resolução:*

O número exato de dias entre as duas datas é:

$$\begin{array}{l} 15/10 = 288 \\ 20/08 = 232 \\ \hline 56 \text{ (ver Apêndice de Tabelas)} \end{array} -$$

$D_c = 1.470$

$i = 27\%$ a.a.

$n = 56$ dias

$$D_c = Nin$$

$$1.470 = N(0,27)\frac{56}{360}$$

$$1.470 = N(0,042)$$

$$N = \frac{1.470}{0,042} = \text{Cr\$ } 35.000,00$$

12. Se o valor descontado comercial for de Cr$ 14.195,00 e o prazo de antecipação for de 270 dias, qual será o valor do título no vencimento, considerando-se uma taxa de 22% a.a.?

*Resolução:*

$V_c = 14.195$

$i = 22\%$ a.a.

$n = 270$ dias

Empregando a fórmula de cálculo direto do valor atual comercial, temos:

$$V_c = N(1 - in)$$

$$14.195 = N\left[1 - (0,22)\frac{270}{360}\right]$$

$$14.195 = N(1 - 0,165)$$

$$N = \frac{14.195}{0,835} = \text{Cr\$ } 17.000,00$$

13. João propõe a Pedro a venda de um título no valor nominal de Cr$ 23.000,00, com vencimento para 3 meses. Considerando que Pedro quer ganhar 39,5% a.a., que taxa de desconto comercial oferecerá a João e quanto pagará pelo título?

*Resolução:*

$N = 23.000$

$n = 3$ meses

Se Pedro quiser ganhar 39,5% a.a., então pagará pelo título certa quantia ($V_r$) que lhe renderá, quando resgatar o título após 3 meses, a taxa proporcional de 39,5% a.a.



Portanto:

$$23.000 = V_r\left[1 + (0,395)\frac{3}{12}\right]$$

$$23.000 = V_r(1 + 0,09875)$$

$$V_r = \frac{23.000}{1,09875} = \text{Cr\$ } 20.932,88$$

Como vemos, se Pedro comprar o título por Cr$ 20.932,88, estará ganhando 39,5% a.a. ao resgatá-lo por Cr$ 23.000,00, 3 meses depois.

A taxa de desconto comercial que lhe interessa é, por conseguinte, a taxa que conduz a um valor atual comercial de Cr$ 20.932,88.

Então:

$N = 23.000$

$V_c = 20.932,88$

$n = 3$ meses

$$V_c = N(1 - in)$$

$$20.932,88 = 23.000\left(1 - i\frac{3}{12}\right)$$

$$\frac{20.932,88}{23.000} = 1 - i\frac{3}{12}$$

$$0,910125 = 1 - \frac{i}{4}$$

$$-0,089875 = -\frac{i}{4}$$

$$i = (0,089875)4$$

$\therefore\ i = 0,3595$ ou $i = 35,95\%$ a.a.

14. Uma empresa retira do Banco Alfa um empréstimo por 3 meses no valor de Cr$ 500.000,00. Se a taxa de juros for de 26% a.a. e, além disso, o banco cobrar 1% a título de despesas administrativas, qual será o desconto bancário?

*Resolução:*

$N = 500.000$

$i = 26\%$ a.a.

$n = 3$ meses

$h = 1\%$ (taxa administrativa)

O desconto bancário ($D_b$) será:

$$D_b = N(h + in)$$

$$D_b = 500.000\left[0{,}01 + (0{,}26)\frac{3}{12}\right]$$

$$D_b = 500.000\,(0{,}01 + 0{,}065)$$

$$D_b = 500.000\,(0{,}075) = \text{Cr\$ } 37.500{,}00$$

15. Um banco cobra, em seus financiamentos, a taxa administrativa de 2% e sua taxa de juros corrente é de 29% a.a. Que financiamento por 3 meses deverá um cliente pedir a este banco se esta pessoa necessitar de Cr$ 10.000,00?

*Resolução:*

Se o cliente precisa de Cr$ 10.000,00, então este é o valor líquido que quer receber, sendo portanto, no caso do desconto bancário, o valor descontado bancário ($V_b$). O valor do financiamento que o cliente irá pedir é o valor nominal.

$V_b = 10.000$

$i = 29\%$ a.a.

$n = 3$ meses

$h = 2\%$

$$V_b = N\left[1 - (h + in)\right]$$

$$10.000 = N\left\{1 - \left[0{,}02 + (0{,}29)\frac{3}{12}\right]\right\}$$

$$10.000 = N[1 - (0{,}02 + 0{,}0725)]$$

$$10.000 = N(1 - 0{,}0925)$$

$$N = \frac{10.000}{0{,}9075} = \text{Cr\$ } 11.019{,}28$$

16. No financiamento de Cr$ 15.000,00, pelo prazo de 6 meses, o cliente recebeu o valor líquido de Cr$ 12.525,00. Se a taxa de juros for fixada em 27% a.a., existirá taxa de serviço cobrada no desconto bancário?

*Resolução:*

$N = 15.000$

$i = 27\%$ a.a.

$n = 6$ meses

$V_b = 12.525$



$$V_b = N[1 - (h + in)]$$

Se não existir taxa administrativa temos que "$h$", na fórmula, será igual a zero.

$$12.525 = 15.000\left\{1 - \left[h + (0{,}27)\frac{6}{12}\right]\right\}$$

$$\frac{12.525}{15.000} = 1 - h - 0{,}135$$

$$0{,}835 = 0{,}865 - h$$

$$h = 0{,}865 - 0{,}835$$

$$\therefore\ h = 0{,}03 \quad \text{ou} \quad h = 3\%$$

Como verificamos, o banco cobrou a taxa administrativa de 3%.

17. Uma Nota Promissória no valor nominal de Cr$ 16.800,00 foi descontada em um banco que cobra 1% de taxa de serviço. O valor descontado bancário recebido foi de Cr$ 15.000,00, uma vez que a taxa de juros considerada fora de 33% a.a. Com base nestas informações, pergunta-se: Qual foi o prazo de antecipação do resgate?

*Resolução:*

$N = 16.800$

$i = 33\%$ a.a.

$h = 1\%$

$V_b = 15.000$

$$V_b = N[1 - (h + in)]$$

$$15.000 = 16.800[1 - (0{,}01 + 0{,}33n)]$$

$$\frac{15.000}{16.800} = 1 - (0{,}01 + 0{,}33n)$$

$$0{,}892857 = 1 - 0{,}01 - 0{,}33n$$

$$0{,}33n = 0{,}99 - 0{,}892857$$

$$n = \frac{0{,}097143}{0{,}33}$$

$$\therefore\ n = 0{,}29437 \text{ anos}$$

Em termos de dias, teremos:

$$1 \text{ ------ } 360 \text{ dias}$$

$$0{,}29437 \text{ ------ } X \text{ dias}$$

Portanto:

$$\frac{1}{360} = \frac{0{,}29437}{X}$$

Então:

$$1X = (0{,}29437)360$$

$$\therefore\ X \cong 106 \text{ dias}$$

18. Em um banco, com taxa de serviço de 2%, foi descontado no dia 05/03/75 um título de valor nominal Cr$ 10.000,00, com vencimento em 13/06/75. Se o valor descontado bancário fosse de Cr$ 9.100,00, qual seria a taxa de juros corrente adotada?

*Resolução:*

Fazendo-se a contagem exata dos dias de antecipação do resgate, temos:

$$\begin{array}{rl} 13/06 = & 164 \\ 05/03 = & \underline{64}\ - \\ & 100 \end{array}$$ (ver Apêndice de Tabelas)

A antecipação foi de 100 dias. Portanto:

$N = 10.000$

$n = 100$ dias

$h = 2\%$

$V_b = 9.100$

O cálculo da taxa de juros pode ser feito tanto pela fórmula do valor descontado bancário quanto pela fórmula do desconto bancário. Por essa última, tem-se:

$$D_b = N - V_b$$

$$D_b = 10.000 - 9.100 = \text{Cr\$ } 900{,}00$$

Como

$$D_b = N(h + in)$$

então:

$$900 = 10.000\left(0{,}02 + i\frac{100}{360}\right)$$

$$900 = 200 + \frac{1.000.000}{360}\,i$$



$$700 = 2.777{,}78\,i$$

$$i = \frac{700}{2.777{,}78}$$

$$\therefore\ i = 0{,}252 \quad \text{ou} \quad i = 25{,}2\%\ \text{a.a.}$$

19. Calcular o desconto comercial de um compromisso no valor nominal de Cr$ 7.500,00, considerando-se a taxa de juros de 28,8% a.a. e o prazo de antecipação do resgate como sendo de 50 dias. Que taxa de juros efetiva está sendo cobrada?

*Resolução:*

Calculando-se inicialmente o desconto comercial, temos:

$N = 7.500$

$i = 28{,}8\%$ a.a.

$n = 50$ dias

$$D_c = Nin$$

$$D_c = 7.500\,(0{,}288)\,\frac{50}{360}$$

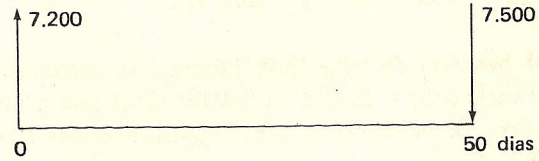
$$D_c = 7.500\,(0{,}04) = \text{Cr\$ } 300{,}00$$

O valor descontado comercial ($V_c$) será:

$$V_c = N - D_c$$

$$V_c = 7.500 - 300 = \text{Cr\$ } 7.200{,}00$$

Portanto, pelo montante de Cr$ 7.500,00 recebeu-se Cr$ 7.200,00. Num diagrama de capitais no tempo, tem-se:




Pelo diagrama torna-se mais evidente que a taxa de juros, que no prazo de 50 dias torna o capital de Cr$ 7.200,00 igual ao montante de Cr$ 7.500,00, é a taxa que realmente está sendo cobrada na operação. A taxa de juros efetiva ($i_f$), por conseguinte, é tal que:

$$N = V_c(1 + i_f n)$$

$$7.500 = 7.200 \left(1 + i_f \frac{50}{360}\right)$$

$$\frac{7.500}{7.200} = 1 + i_f \cdot \frac{50}{360}$$

$$1{,}041667 = 1 + i_f \cdot \frac{50}{360}$$

$$i_f = (0{,}041667)\frac{360}{50}$$

$$\therefore\ i_f = 0{,}30 \quad \text{ou} \quad i_f = 30\%\ \text{a.a.}$$

Outro método para o cálculo da taxa efetiva é através da fórmula

$$i_f = \frac{i}{1 - in}$$

onde: $i$ = taxa de desconto anual

$n$ = número de períodos de antecedência da data de vencimento.

Neste problema, temos:

$i$ = 28,8% a.a.

$n$ = 50 dias

Portanto:

$$i_f = \frac{0{,}288}{1 - (0{,}288)\frac{50}{360}}$$

$$i_f = \frac{0{,}288}{1 - 0{,}04}$$

$$i_f = \frac{0{,}288}{0{,}96} = 0{,}30 \quad \text{ou} \quad i_f = 30\%\ \text{a.a.}$$

20. O valor atual bancário de uma Nota Promissória descontada 3 meses antes de seu vencimento é de Cr$ 11.040,00. Qual será a taxa de juros efetiva, se a taxa de desconto for de 27% a.a. e a taxa administrativa for de 1,25%?

*Resolução:*

Calculamos inicialmente o valor nominal da Nota Promissória, para que possamos utilizar a relação do valor nominal com o valor descontado.

Portanto:

$V_b$ = 11.040



$i$ = 27% a.a.

$n$ = 3 meses

$h$ = 1,25%

$$V_b = N[1 - (h + in)]$$

$$11.040 = N\left\{1 - \left[0{,}0125 + (0{,}27)\frac{3}{12}\right]\right\}$$

$$11.040 = N(1 - 0{,}08)$$

$$N = \frac{11.040}{0{,}92} = \text{Cr\$ } 12.000{,}00$$

A taxa de juros efetiva ($i_f$) será obtida por:

$$N = V_b(1 + i_f n)$$

$$12.000 = 11.040 \left(1 + i_f \cdot \frac{3}{12}\right)$$

$$\frac{12.000}{11.040} = 1 + i_f \cdot \frac{3}{12}$$

$$1{,}086957 = 1 + i_f \cdot \frac{3}{12}$$

$$i_f = (0{,}086957)\frac{12}{3} = 0{,}3478 \quad \text{ou} \quad i_f = 34{,}78\%\ \text{a.a.}$$

Para a aplicação da fórmula de cálculo direto da taxa efetiva, é necessário, no caso do desconto bancário, calcular antes a taxa de desconto bancário mensal. Neste problema temos:

$i$ = 27% a.a.

$h$ = 1,25%

$n$ = 3 meses

Portanto, as taxas proporcionais mensais serão, respectivamente:

$$i_m = \frac{0{,}27}{12} = 0{,}02250\ \text{a.m.}$$

$$h_m = \frac{0{,}0125}{3} = 0{,}00417\ \text{a.m.}$$

A taxa de desconto bancário mensal ($i'$) será:

$$i' = i_m + h_m$$

$$i' = 0{,}02250 + 0{,}00417 = 0{,}02667\ \text{a.m.}$$

A taxa efetiva mensal será dada por:

$$i_f = \frac{i'}{1 - i'n}$$

$$i_f = \frac{0{,}02667}{1 - (0{,}02667)\,3}$$

$$i_f = \frac{0{,}02667}{0{,}91999} = 0{,}02899 \text{ a.m.}$$

ou em termos anuais:

$$i_f = 34{,}78\% \text{ a.m.}$$

21. Que taxa anual de desconto comercial exigirá uma entidade financeira numa antecipação de 6 meses, se ela deseja ganhar a taxa de juros efetiva de 26% a.a.?

*Resolução:*

$i_f = 26\%$ a.a.

$n = 6$ meses ou 0,5 ano

Sabendo-se que:

$$V_c = N(1 - in)$$

onde $(i)$ é a taxa anual de desconto e que

$$N = V_c(1 + i_f n)$$

onde $(i_f)$ é a taxa de juros efetiva anual, podemos estabelecer a igualdade:

$$N = N(1 - in)\,(1 + i_f n)$$

$$N = N(1 - 0{,}5i)[1 + (0{,}26)0{,}5]$$

$$\frac{N}{N} = (1 - 0{,}5i)\,(1{,}13)$$

$$\frac{1}{1{,}13} = 1 - 0{,}5i$$

$$0{,}884956 = 1 - 0{,}5i$$

$$i = \frac{1 - 0{,}884956}{0{,}5}$$

$$i = \frac{0{,}115044}{0{,}5} = 0{,}2301 \quad \text{ou} \quad i = 23{,}01\% \text{ a.a.}$$



22. O valor descontado comercial de uma promissória é igual a um quarto de seu valor nominal. Qual será a taxa de desconto comercial anual, se o prazo de antecipação do resgate for de 8 meses?

*Resolução:*

Se o valor descontado comercial for um quarto do valor nominal, então:

$$V_c = \frac{1}{4}N$$

Como o prazo de antecipação é de 8 meses, temos:

$n = 8$ meses

Portanto:

$$V_c = N(1 - in)$$

$$\frac{1}{4}N = N\left(1 - i \cdot \frac{8}{12}\right)$$

$$\frac{1}{4}\frac{\cancel{N}}{\cancel{N}} = 1 - i \cdot \frac{8}{12}$$

$$0{,}25 = 1 - i \cdot \frac{8}{12}$$

$$i = (1 - 0{,}25)\,\frac{12}{8}$$

$$i = (0{,}75)\,\frac{12}{8} = 1{,}125 \text{ a.a.} \quad \text{ou} \quad i = 112{,}5\% \text{ a.a.}$$

23. Numa operação de desconto de um título a vencer em 5 meses, o desconto comercial é Cr$ 140,00 maior que o desconto racional. Qual será o valor nominal do título, se a taxa de juros empregada nos descontos for de 24% a.a.?

*Resolução:*

$i = 24\%$ a.a.

$n = 5$ meses

Se o desconto comercial é Cr$ 140,00 maior que o desconto racional, isto quer dizer que:

$$D_c = D_r + 140$$

Lembrando que:

$$D_c = D_r(1 + in)$$

então:

$$D_c = D_r + D_r in$$

Considerando a questão proposta no problema, tem-se:

$$D_c = D_r + 140$$

$$D_c = D_r + D_r in$$

Por conseguinte:

$$140 = D_r in$$

$$140 = D_r (0{,}24)\frac{5}{12}$$

$$140 = D_r (0{,}10)$$

$$D_r = \frac{140}{0{,}10} = \text{Cr\$ } 1.400{,}00$$

Tendo encontrado o valor do desconto racional, temos agora todos os dados necessários para calcular o valor nominal do título:

$D_r = 1.400$

$i = 24\%$ a.a.

$n = 5$ meses

$$D_r = \frac{Nin}{1 + in}$$

$$1.400 = \frac{N(0{,}24)\frac{5}{12}}{1 + (0{,}24)\frac{5}{12}}$$

$$1.400 = \frac{N(0{,}10)}{1{,}10}$$

$$N = \frac{1.400\,(1{,}10)}{0{,}10} = \text{Cr\$ } 15.400{,}00$$

24. Qual é o prazo de antecipação do resgate tal que o desconto racional seja igual a três quartos do desconto comercial, considerando-se uma taxa de juros de 40% a.a. em ambos os descontos?

*Resolução:*

Se o desconto racional é igual a três quartos do desconto comercial, então:

$$D_r = \frac{3}{4} D_c$$



sendo a taxa de juros

$i = 40\%$ a.a.

Portanto, considerando a fórmula:

$$D_c = D_r(1 + in)$$

temos:

$$D_c = \frac{3}{4} D_c (1 + 0{,}40n)$$

$$\frac{D_c}{D_c} = \frac{3}{4}(1 + 0{,}40n)$$

$$1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}(0{,}40)n$$

$$1 = 0{,}75 + 0{,}30n$$

$$n = \frac{1 - 0{,}75}{0{,}30}$$

$$n = \frac{0{,}25}{0{,}30} = 0{,}83333 \text{ anos}$$

O prazo expresso em termos de meses será:

$$1 \text{ ------- } 12 \text{ meses}$$

$$0{,}83333 \text{ ------- } X \text{ meses}$$

Portanto:

$$\frac{1}{12} = \frac{0{,}83333}{X}$$

então

$$1X = 12(0{,}83333) = 10 \text{ meses}$$

25. A diferença entre o valor atual racional e o valor atual comercial é de Cr$ 25,00. Sabendo-se que o valor nominal do título é de Cr$ 10.500,00 e que o prazo de antecipação é de 2 meses, pergunta-se qual foi a taxa de juros adotada.

*Resolução:*

$N = 10.500$

$n = 2$ meses

Pelo enunciado do problema, temos:

$$V_r = V_c + 25$$

Considerando as fórmulas do valor atual racional e do valor atual comercial, vem:

$$V_c = N(1 - in)$$

$$V_r = \frac{N}{1 + in}$$

Portanto:

$$V_c = 10.500\left(1 - i \cdot \frac{2}{12}\right)$$

e

$$V_r = \frac{10.500}{1 + i \cdot \frac{2}{12}}$$

Como

$$V_r = V_c + 25$$

podemos substituir na fórmula do valor atual racional:

$$V_c + 25 = \frac{10.500}{1 + i \cdot \frac{2}{12}}$$

Substituindo o valor atual comercial na expressão acima, temos:

$$10.500\left(1 - i \cdot \frac{2}{12}\right) + 25 = \frac{10.500}{1 + i \cdot \frac{2}{12}}$$

$$10.525 - 1.750i = \frac{10.500}{1 + i \cdot \frac{2}{12}}$$

Donde

$$-291{,}667i^2 + 4{,}167i + 25 = 0$$

Resolvendo-se esta equação do 2º grau, consideraremos apenas a raiz positiva, visto que a taxa de juros negativa não tem significado financeiro.

A taxa de juros, que é solução da equação acima, é de:

$$i = 0{,}30 \quad \text{ou} \quad i = 30\% \text{ a.a.}$$



## 6. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determinar o desconto racional das hipóteses seguintes:

| | Valor Nominal | Taxa | Prazo até Vencimento |
|---|---|---|---|
| a) | Cr$ 10.000,00 | 23% a.a. | 3 meses |
| b) | Cr$ 7.500,00 | 29% a.a. | 100 dias |
| c) | Cr$ 8.200,00 | 20,5% a.a. | 1 ano e 2 meses |
| d) | Cr$ 3.000,00 | 26% a.a. | 3 meses e 20 dias |

2. Determinar o valor atual racional dos seguintes títulos:

| | Valor Nominal | Taxa | Prazo até Vencimento |
|---|---|---|---|
| a) | Cr$ 20.000,00 | 15,9% a.a. | 50 dias |
| b) | Cr$ 12.500,00 | 21% a.a. | 125 dias |
| c) | Cr$ 6.420,00 | 30% a.a. | 8 meses |
| d) | Cr$ 5.000,00 | 26,4% a.a. | 181 dias |

3. Quanto devo pagar por um título no valor nominal de Cr$ 15.000,00 com vencimento em 150 dias se quero ganhar 36% a.a.?

4. O valor nominal de uma promissória com vencimento em 15/11/75 é de Cr$ 2.700,00. Se o dinheiro valer 36% a.a. e a promissória for saldada dia 19/08/75, de quanto será o desconto por dentro obtido? Qual o valor atual?

5. Se o desconto racional concedido for de Cr$ 57,63, qual será a taxa considerada, uma vez que o valor nominal é de Cr$ 600,00 e o período de antecipação 5 meses?

6. Um título de valor nominal Cr$ 1.300,00 foi resgatado antes de seu vencimento, sendo por isso bonificado com um desconto racional de Cr$ 238,78. Considerando a taxa de 27% a.a., qual foi a antecedência?

7. O valor atual de uma promissória é de Cr$ 1.449,28, tendo sido adotada a taxa de 18% a.a. Qual será o prazo de antecedência, se o desconto racional for de Cr$ 50,72?

8. Um título cujo resgate foi efetuado 145 dias antes do vencimento foi negociado à taxa de 23% a.a. Qual era o valor nominal do título, uma vez que o valor atual racional recebido foi de Cr$ 1.921,95?

9. Calcular o desconto comercial das hipóteses seguintes:

| | Valor Nominal | Taxa | Prazo até Vencimento |
|---|---|---|---|
| a) | Cr$ 12.500,00 | 37% a.a. | 250 dias |
| b) | Cr$ 18.000,00 | 35% a.a. | 3 meses |
| c) | Cr$ 20.000,00 | 28% a.a. | 8 meses |
| d) | Cr$ 22.000,00 | 27% a.a. | 4 meses e 12 dias |

10. Determinar o valor descontado (valor atual comercial) das hipóteses apresentadas no exercício anterior.

11. Se o desconto comercial for de Cr$ 1.125,00, qual será o valor nominal, se a taxa considerada for de 27% a.a. e o prazo de antecedência 100 dias?

12. Uma nota promissória foi descontada 4 meses antes de seu vencimento à taxa de 26% a.a. Sabendo-se que o valor atual comercial foi de Cr$ 18.266,67, qual seria seu valor nominal?

13. Um título com vencimento em 28/08 foi descontado dia 01/03 do mesmo ano. Qual seria a taxa contratada se o valor nominal fosse de Cr$ 12.000,00 e o desconto comercial de Cr$ 1.500,00?

14. O valor nominal de um título é 15 vezes o desconto comercial a 30% a.a. Qual será o prazo de antecipação, se o desconto comercial for de Cr$ 640,00?

15. O valor atual comercial recebido de um título é de Cr$ 23.600,00, considerando-se a taxa de 28% a.a. e o prazo de antecipação de 72 dias. Pergunta-se: Qual é o desconto comercial?

16. Se a taxa de juros corrente for de 30% a.a., qual será o valor atual comercial se o desconto de um título no valor de Cr$ 18.000,00 ocorrer 90 dias antes de seu vencimento?

17. Uma pessoa tomou emprestado Cr$ 10.000,00 para pagar após um ano, tendo sido contratada a taxa de 25% a.a. Quatro meses antes do vencimento o devedor resolveu resgatar o título, contanto que fosse efetuado desconto comercial e à taxa, então vigorante no mercado, de 26,5% a.a. Qual o valor líquido que o devedor se propõe pagar?

18. Pelo valor nominal de Cr$ 10.000,00 uma pessoa recebeu Cr$ 9.556,94 como sendo o valor atual comercial. Qual foi a antecipação, se a taxa de juros adotada tivesse sido de 29% a.a.?

19. Qual será o desconto bancário em uma operação onde o valor nominal é de Cr$ 7.000,00 e o prazo de antecipação é de 105 dias? Considerar juros correntes de 23,5% a.a. e taxa administrativa de 2%.

20. João, desejando comprar um carro, pediu empréstimo de Cr$ 17.000,00 pelo prazo de 3 meses. Sabendo-se que o Banco Alfa cobra 2% de despesas administrativas e que a taxa de juros de mercado é de 28,4% a.a., qual é o preço do carro? (O valor recebido é o preço do carro.)

21. Se uma empresa necessitar de Cr$ 10.740,00 para saldar uma duplicata, que compromisso deverá assumir por 90 dias, se a taxa corrente for de 36% a.a. e o banco cobrar 1,5% de taxa de serviço?

22. O Banco X anuncia que sua taxa de juros é a menor do mercado, cobrando apenas 3% de taxa administrativa. Exemplifica, dizendo que, para 6 meses, se o cliente pedir Cr$ 45.000,00, sofrerá um desconto de apenas Cr$ 8.550,00. Qual é a taxa de juros considerada?



23. Por um empréstimo de Cr$ 5.000,00 a 4 meses João recebeu líquido Cr$ 4.291,67. Tendo perguntado ao gerente qual fora a taxa de juros empregada, este lhe garantiu que era de 24,5% a.a. Qual foi a taxa de serviço cobrada?

24. Um empréstimo de Cr$ 4.000,00 foi retirado de um banco cuja taxa administrativa é de 2,5%. Se o desconto bancário fosse de Cr$ 564,00 e a taxa de juros 27,84% a.a., qual seria o prazo contratado para tal empréstimo?

25. Um título a vencer em 90 dias, no valor de Cr$ 10.000,00, foi descontado por Cr$ 9.375,00 (valor atual comercial). Qual é a taxa de desconto e qual a taxa efetiva?

26. Uma duplicata de valor nominal Cr$ 8.000,00 foi descontada 90 dias antes de seu vencimento a 23,5% a.a. Qual é o desconto comercial? Qual a taxa efetiva?

27. Um fornecedor oferece 3 meses de prazo em suas vendas. O cliente que optar pelo pagamento a vista receberá um desconto de 10% sobre o valor nominal. Que taxa de juros anual efetiva está sendo cobrada?

28. Se uma instituição desejar ganhar 36% a.a. (taxa efetiva), que taxa de desconto deverá aplicar para operações com os prazos de:

    a) 1 mês; b) 3 meses; c) 6 meses.

29. O Banco Alfa cobra 2% de taxa de serviço e como taxa de juros emprega 26% a.a. Qual é o desconto bancário de um título com valor nominal de Cr$ 3.000,00 e vencimento a 4 meses? Qual é a taxa efetiva?

30. Uma empresa vai ao banco para descontar uma duplicata de Cr$ 7.200,00 com vencimento a 5 meses. Se a taxa de juros for de 25% a.a. e a taxa de serviço de 2,5%, qual será o valor líquido recebido e a taxa efetiva paga pela empresa?

31. Se o banco exigir 2% como taxa administrativa, qual será a taxa efetiva se a taxa de juros corrente for de 27% a.a. e os prazos de desconto forem:

    a) 1 mês; b) 3 meses; c) 6 meses.

32. A diferença entre o desconto comercial e o desconto racional é de Cr$ 36,13. Sabendo-se que o prazo de antecipação é de 3 meses e que a taxa de juros considerada é de 25,44% a.a., qual é o valor nominal do compromisso?

33. O quociente entre os descontos comercial e racional é de 1,06. Qual será o prazo de antecipação se a taxa de juros for de 24% a.a.?

34. O desconto comercial supera o desconto racional em Cr$ 36,00 e o prazo de antecipação é de 90 dias. Qual é o desconto comercial, uma vez que o valor nominal do compromisso é de Cr$ 10.600,00?

35. O quociente entre o desconto comercial e o valor nominal é de 0,135, ao passo que o quociente entre os descontos comercial e racional é de 1,135. Qual será a taxa considerada, se a antecipação for de 6 meses?

36. A diferença entre o valor atual racional e o valor atual comercial é de Cr$ 416,51, sendo o prazo de antecipação 8 meses e a taxa de juros 28,2% a.a. Qual é o valor nominal do título?

37. O desconto bancário supera o desconto racional em Cr$ 733,23, considerando-se a taxa de juros de 30,6% a.a. e antecipação de 4 meses. Qual será a taxa administrativa no desconto bancário se a diferença entre os descontos comercial e racional for de Cr$ 283,23?

**Respostas**

1. a) Cr$ 543,74
   b) Cr$ 559,13
   c) Cr$ 1.582,65
   d) Cr$ 220,79
2. a) Cr$ 19.567,88
   b) Cr$ 11.650,49
   c) Cr$ 5.350,00
   d) Cr$ 4.414,10
3. Cr$ 13.043,48
4. a) Cr$ 218,38
   b) Cr$ 2.481,62
5. 25,5% a.a.
6. 300 dias
7. 70 dias
8. Cr$ 2.100,00
9. a) Cr$ 3.211,80
   b) Cr$ 1.575,00
   c) Cr$ 3.733,33
   d) Cr$ 2.178,00
10. a) Cr$ 9.288,20
    b) Cr$ 16.425,00
    c) Cr$ 16.266,67
    d) Cr$ 19.822,00
11. Cr$ 15.000,00
12. Cr$ 20.000,00
13. 25% a.a.
14. 80 dias
15. Cr$ 1.400,00
16. Cr$ 16.650,00
17. Cr$ 11.395,84
18. 55 dias
19. Cr$ 619,79
20. Cr$ 15.453,00
21. Cr$ 12.000,00
22. 32% a.a.
23. 6%
24. 5 meses
25. 25% a.a.; 26,67% a.a.
26. Cr$ 470,00; 24,97% a.a.
27. 44,44% a.a.
28. a) 34,95% a.a.
    b) 33,03% a.a.
    c) 30,51% a.a.
29. Cr$ 320,00; 35,82% a.a.
30. Cr$ 6.270,00; 35,60% a.a.
31. a) 53,26% a.a.
    b) 38,36% a.a.
    c) 36,69% a.a.
32. Cr$ 9.500,18
33. 3 meses
34. Cr$ 636,00
35. 27% a.a.
36. Cr$ 14.000,00
37. 1,5%



# 3
# Equivalência de Capitais

Como já foi visto no caso das operações de desconto, é freqüente a necessidade de antecipar ou prorrogar títulos nas operações financeiras. Às vezes queremos substituir um título por outro ou um título por vários. Podemos também ter vários títulos que queremos substituir por um único.

Tais problemas dizem respeito, de modo geral, à equivalência de valores diferentes referidos a datas diferentes.

## 1. DEFINIÇÕES

### 1.1. Data focal

É a data que se considera como base de comparação dos valores referidos a diferentes datas.

A data focal também é chamada *data de avaliação* ou *data de referência.*

*Exemplo:* Certa pessoa tem uma nota promissória no valor nominal de Cr$ 1.500,00, que vencerá em 2 anos à taxa de juros simples de 25% a.a. Além disto possui Cr$ 2.000,00 que irá aplicar a 30% a.a. em juros simples, durante 2 anos.

Pergunta-se:

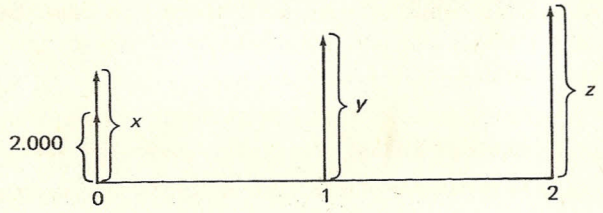
a) Quanto possui hoje?

b) Quanto possuirá daqui a um ano?

c) Quanto possuirá daqui a dois anos?

*Resolução:*

Representemos o problema graficamente:




Sejam: $x$ = quantia que possui na data zero.

$y$ = quantia que possuirá na data 1.

$z$ = quantia que possuirá na data 2.

a) *Hoje:*

$$x = 2.000 + \frac{1.500}{1 + 0,25 \cdot 2} = 2.000 + \frac{1.500}{1,5} = 3.000$$

$\therefore\ x =$ Cr$ 3.000,00

b) *Daqui a 1 ano:*

$$y = 2.000\ (1 + 0,30 \cdot 1) + \frac{1.500}{1 + 0,25 \cdot 1}$$

$$y = 2.000\ (1,30) + \frac{1.500}{1,25}$$

$$y = 2.600 + 1.200$$

$\therefore\ y =$ Cr$ 3.800,00

c) *Daqui a 2 anos:*

$$z = 2.000\ (1 + 0,30 \cdot 2) + 1.500$$

$$z = 2.000\ (1,60) + 1.500$$

$$z = 3.200 + 1.500$$

$$z =$$ Cr$ 4.700,00



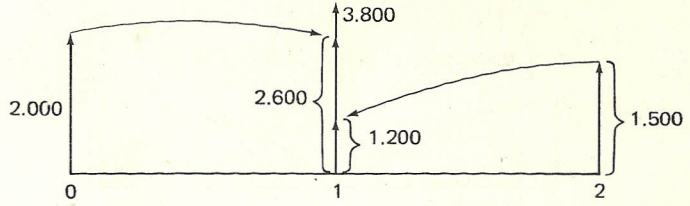
Observe-se que, ao considerarmos a data de hoje como data focal, às taxas de juros simples consideradas, a pessoa possui Cr$ 3.000,00. Se a data focal for no 1º ano, o total possuído será de Cr$ 3.800,00 e se no 2º ano, de Cr$ 4.700,00.

### 1.2. Equação de valor

A equação de valor permite que sejam igualados capitais diferentes, referidos a datas diferentes, em uma mesma data focal. Em outras palavras, a equação de valor é constituída igualando-se em uma dada data focal as somas dos valores atuais e/ou montantes dos compromissos que formam a alternativa em análise.

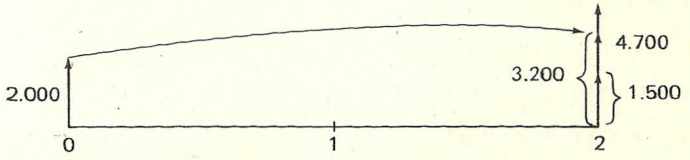
*Exemplo:* Considere-se o exercício resolvido no item anterior. As expressões de primeiro grau em $x$, $y$ e $z$ são equações de valor.

Consideremos o valor $y = 3.800,00$, calculado na data focal 1. Este valor, conforme calculado, é composto de duas parcelas:




A importância de Cr$ 2.600,00 é o *montante* de Cr$ 2.000,00 à taxa de 30% a.a. e a importância de Cr$ 1.200,00 é o *valor atual* de Cr$ 1.500,00 à taxa de 25% a.a.

O valor $z = 4.700,00$ foi obtido através de uma equação de valor na qual passamos diretamente da data focal 0 para a data focal 2:




Podemos pensar em uma nova equação de valor, em que passamos da data focal 1 para a data focal 2:

$$z' = 2.600\ (1 + 0,30 \cdot 1) + 1.200\ (1 + 0,25 \cdot 1)$$

$z' = 3.380 + 1.500$

$z' = \text{Cr\$ } 4.880,00$

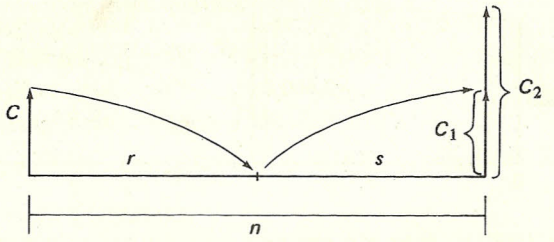
Concluímos que as equações de valor em $z$ e em $z'$ não são equivalentes, pois seus resultados numéricos são diferentes. Logo, a solução deste problema, *no regime de juros simples*, depende da data focal considerada.

Isto ocorre devido à forma de capitalização adotada no regime de juros simples, em que não se pode fracionar o prazo de aplicação. Ou seja, a formação do montante e do valor atual não é cindível em valores intermediários, uma vez que o juro é admitido como sendo formado no fim do período de aplicação.

Tal fato pode ser demonstrado de forma algébrica admitindo-se um capital $C$, aplicado à taxa $i$ por dois períodos $r$ e $s$ tais que:

$n = r + s$

Ou, representando graficamente:




Seja $C_1$ o montante do capital $C$, aplicado à taxa $i$ pelo prazo $n$:

$C_1 = C(1 + in)$

Substituindo-se:

$n = r + s$

tem-se:

$C_1 = C[1 + i(r + s)]$

$C_1 = C[1 + ir + is]$

Seja agora $C_2$ o montante do capital $C$, aplicado à taxa $i$ pelos prazos $r$ e $s$. Admitindo-se que $C_2'$ é o montante de $C$ à taxa $i$ e pelo prazo $r$, tem-se:

$C_2' = C(1 + ir)$



Agora, a aplicação de $C_2'$ à taxa $i$ e pelo prazo $s$ permite obter $C_2$:

$C_2 = C_2'(1 + is)$

$\therefore C_2 = C(1 + ir) \cdot (1 + is) = C[1 + ir + is + i^2rs]$

Comparando os valores de $C_1$ e de $C_2$, tem-se:

$C_2 - C_1 = C[1 + ir + is + i^2rs] - C[1 + ir + is]$

$$\boxed{C_2 - C_1 = Ci^2rs}$$

Como o capital, a taxa de juros e os prazos são sempre maiores ou iguais a zero, tem-se:

$C_2 \geqslant C_1$

Ou seja:

$C(1 + ir)(1 + is) \geqslant C(1 + in)$

O primeiro termo é maior porque, ao fracionarmos o prazo, estamos considerando juro sobre juro e não apenas o juro devido ao capital inicial.

*Exemplo:* Sendo dado um capital de Cr$ 1.000,00 que pode ser aplicado pelo prazo de 12 meses à taxa de 2% a.m., calcular a diferença de montante que se obteria caso a aplicação fosse feita seqüencialmente por 4 e por 8 meses. Em que condição a diferença seria máxima, fazendo-se apenas duas aplicações?

*Resolução:*

A diferença é dada por:

$C_2 - C_1 = Ci^2rs$

$C_2 - C_1 = 1.000 \cdot (0,02)^2 \cdot 4 \cdot 8$

$C_2 - C_1 = 1.000 \cdot (0,0004) \cdot 32$

$C_2 - C_1 = 1.000 \cdot (0,0128)$

$C_2 - C_1 = \text{Cr\$ } 12,80$

A máxima diferença em duas aplicações ocorre quando as aplicações são feitas por 6 meses (por quê?).

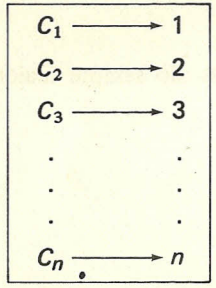
## 2. CAPITAIS EQUIVALENTES

Dois ou mais capitais nominais, supostos com datas de vencimento determinadas, dizem-se *equivalentes* quando, descontados para uma data focal à mesma taxa de juros e em idênticas condições, produzirem valores iguais.

Deve-se especificar o tipo de desconto, pois o resultado da operação de desconto em juros simples depende da modalidade adotada.

### 2.1. Equivalência de capitais com desconto por dentro ou racional

Seja um conjunto de valores nominais referidos às suas respectivas datas de vencimento:

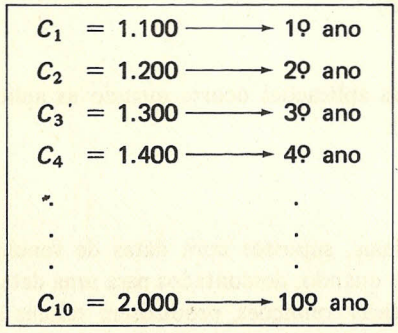



Adotando uma taxa $i$ de juros simples, teremos os capitais equivalentes na data focal zero, se:

$$V = \frac{C_1}{1 + i \cdot 1} = \frac{C_2}{1 + i \cdot 2} = \frac{C_3}{1 + i \cdot 3} = \ldots = \frac{C_n}{1 + i \cdot n} \qquad (15)$$

Indicamos os valores por $V$, já que estes são os valores atuais à taxa $i$ na data focal zero.

*Exemplo:* considerem-se os valores nominais seguintes que vencem nos anos estipulados:






Admitindo-se uma taxa de juros simples de 10% a.a., constatar que os capitais são equivalentes na data focal zero.

*Resolução:* calculemos os valores atuais na data zero:

$$V_1 = \frac{C_1}{1 + 0{,}10 \cdot 1} = \frac{1.100}{1 + 0{,}1} = 1.000$$

$$V_2 = \frac{C_2}{1 + 0{,}10 \cdot 2} = \frac{1.200}{1 + 0{,}2} = 1.000$$

$$V_3 = \frac{C_3}{1 + 0{,}10 \cdot 3} = \frac{1.300}{1 + 0{,}3} = 1.000$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$V_{10} = \frac{C_{10}}{1 + 0{,}10 \cdot 10} = \frac{2.000}{1 + 1} = 1.000$$

Logo, podemos concluir que:

$$V_1 = V_2 = V_3 = \ldots\ldots = V_{10}$$

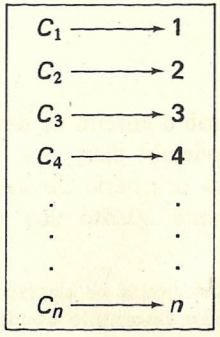
Portanto:

$$1.000 = \frac{1.100}{1{,}1} = \frac{1.200}{1{,}2} = \ldots\ldots = \frac{2.000}{2}$$

Ou seja, os capitais são equivalentes na data focal zero sob o critério de desconto racional. Isto significa que o possuidor de dois ou mais *capitais equivalentes*, sob o critério de desconto racional em condições fixadas, ficará indiferente quanto aos valores nominais.

### 2.2. Equivalência de capitais com desconto por fora ou comercial

Considere-se um conjunto de valores nominais referidos às suas respectivas datas de vencimento:



Tais capitais se dizem equivalentes, sob o critério de desconto comercial simples, à taxa de juros $i$ e na data focal zero, se:

$$V = C_1(1 - i \cdot 1) = C_2(1 - i \cdot 2) = C_3(1 - i \cdot 3) = \\ = \ldots = C_n(1 - i \cdot n) \tag{16}$$

Isto porque estes serão os respectivos valores descontados comerciais à taxa de juros $i$, na data focal zero.

*Exemplo:* sejam os valores nominais seguintes, que vencem nas datas estipuladas:

$C_1 = 1.111{,}11 \longrightarrow$ 1º ano
$C_2 = 1.250{,}00 \longrightarrow$ 2º ano
$C_3 = 1.428{,}57 \longrightarrow$ 3º ano
$C_4 = 1.666{,}67 \longrightarrow$ 4º ano
$C_5 = 2.000{,}00 \longrightarrow$ 5º ano

Admitindo-se uma taxa de juros de 10% a.a., verificar se estes capitais são equivalentes, sob o critério de desconto comercial, na data focal zero.

*Resolução:* calculemos os respectivos valores atuais, sob o critério de desconto comercial, na data focal zero:

$$V_1 = C_1(1 - i \cdot 1) = 1.111{,}11\ (1 - 0{,}1 \cdot 1) \cong 1.000$$
$$V_2 = C_2(1 - i \cdot 2) = 1.250{,}00\ (1 - 0{,}1 \cdot 2) = 1.000$$
$$V_3 = C_3(1 - i \cdot 3) = 1.428{,}57\ (1 - 0{,}1 \cdot 3) \cong 1.000$$
$$V_4 = C_4(1 - i \cdot 4) = 1.666{,}67\ (1 - 0{,}1 \cdot 4) \cong 1.000$$
$$V_5 = C_5(1 - i \cdot 5) = 2.000{,}00\ (1 - 0{,}1 \cdot 5) = 1.000$$

Ou seja:

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_5$$

Isto é, os citados capitais são equivalentes, sob o critério de desconto comercial, na data focal zero. Aqui também podemos dizer que o possuidor de dois ou mais capitais equivalentes, sob o critério de desconto comercial em condições fixadas, ficará indiferente quanto aos valores nominais.

**Nota:** O mesmo raciocínio pode ser estendido para equivalência de capitais sob o critério de *desconto bancário*, desde que seja usado o valor descontado bancário.



## 3. CONJUNTOS EQUIVALENTES DE CAPITAIS

Seja uma taxa $i$ de juros simples e dois conjuntos de valores nominais, com seus prazos respectivos, referidos à mesma data de origem:

| 1º Conjunto | 2º Conjunto |
|---|---|
| $C_1 \longrightarrow m_1$ | $C'_1 \longrightarrow m'_1$ |
| $C_2 \longrightarrow m_2$ | $C'_2 \longrightarrow m'_2$ |
| . . | . . |
| . . | . . |
| . . | . . |
| $C_n \longrightarrow m_n$ | $C'_n \longrightarrow m'_n$ |

Os dois conjuntos se dizem *equivalentes*, fixadas uma data focal e uma taxa de juros, se a soma de seus respectivos valores atuais é igual.

Este conceito pode ser estendido para mais de dois conjuntos de capital. Como a equivalência dos conjuntos é baseada na soma de valores atuais, o tipo de desconto deve ser explicitado.

### 3.1. Conjuntos equivalentes de capitais com desconto racional ou por dentro

Os dois conjuntos de valores nominais dados serão equivalentes sob o critério de desconto racional se:

$$\frac{C_1}{1 + i \cdot m_1} + \frac{C_2}{1 + i \cdot m_2} + \frac{C_3}{1 + i \cdot m_3} + \ldots + \frac{C_n}{1 + i \cdot m_n} = \\ = \frac{C'_1}{1 + i \cdot m'_1} + \frac{C'_2}{1 + i \cdot m'_2} + \frac{C'_3}{1 + i \cdot m'_3} + \ldots + \frac{C'_n}{1 + i \cdot m'_n} \tag{17}$$

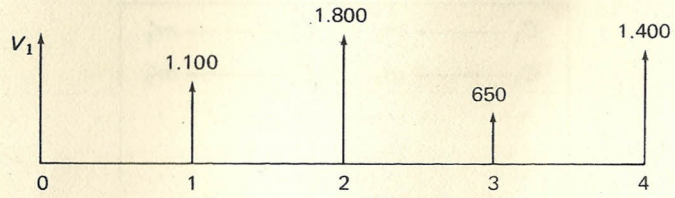
Um exemplo esclarecerá melhor: verificar se os conjuntos seguintes de valores nominais, referidos à data zero e descontados racionalmente à taxa de juros simples de 10% a.a., são equivalentes:

| 1º Conjunto | 2º Conjunto |
|---|---|
| $C_1 = 1.100 \longrightarrow m_1 = 1$ ano | $C'_1 = 2.400 \longrightarrow m'_1 = 2$ anos |
| $C_2 = 1.800 \longrightarrow m_2 = 2$ anos | $C'_2 = 1.300 \longrightarrow m'_2 = 3$ anos |
| $C_3 = 650 \longrightarrow m_3 = 3$ anos | $C'_3 = 1.500 \longrightarrow m'_3 = 5$ anos |
| $C_4 = 1.400 \longrightarrow m_4 = 4$ anos | |

*Resolução:*

A constatação deve ser feita considerando-se a soma dos valores atuais à data focal zero:

a) *1º Conjunto de capitais*

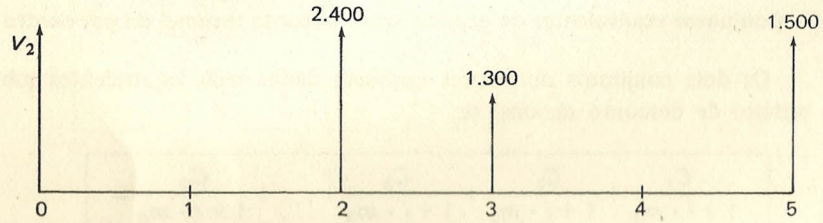



$$V_1 = \frac{1.100}{1 + 0{,}10 \cdot 1} + \frac{1.800}{1 + 0{,}10 \cdot 2} + \frac{650}{1 + 0{,}10 \cdot 3} + \frac{1.400}{1 + 0{,}10 \cdot 4}$$

$$V_1 = 1.000 + 1.500 + 500 + 1.000$$

$$\therefore \; V_1 = \text{Cr\$ } 4.000{,}00$$

b) *2º Conjunto de capitais*




$$V_2 = \frac{2.400}{1 + 0{,}10 \cdot 2} + \frac{1.300}{1 + 0{,}10 \cdot 3} + \frac{1.500}{1 + 0{,}10 \cdot 5}$$

$$V_2 = 2.000 + 1.000 + 1.000$$

$$\therefore \; V_2 = \text{Cr\$ } 4.000{,}00$$

Logo, como $V_1 = V_2$, concluímos que os dois conjuntos de capitais são equivalentes sob o *critério de desconto racional*, no regime de juros simples.

### 3.2. Conjuntos equivalentes de capitais com desconto comercial ou por fora

Analogamente, em desconto comercial, os dois conjuntos de valores nominais citados serão equivalentes se:



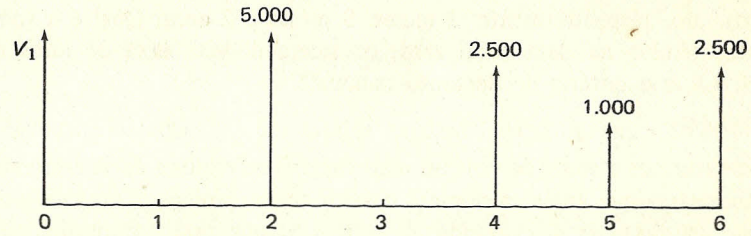
$$\boxed{\begin{aligned} &C_1(1 - i \cdot m_1) + C_2(1 - i \cdot m_2) + \ldots + C_n(1 - i \cdot m_n) = \\ &= C'_1(1 - i \cdot m'_1) + C'_2(1 - i \cdot m'_2) + \ldots + C'_n(1 - i \cdot m'_n) \end{aligned}} \quad (18)$$

*Exemplo:* verificar se os conjuntos seguintes de valores nominais, referidos à data focal zero e à taxa de juros simples de 15% a.a., são equivalentes sob o critério de desconto comercial:

| 1º Conjunto | 2º Conjunto |
|---|---|
| $C_1 = 5.000 \longrightarrow m_1 = 2$ anos | $C'_1 = 5.000 \longrightarrow m'_1 = 1$ ano |
| $C_2 = 2.500 \longrightarrow m_2 = 4$ anos | $C'_2 = 1.250 \longrightarrow m'_2 = 4$ anos |
| $C_3 = 1.000 \longrightarrow m_3 = 5$ anos | $C'_3 = 1.000 \longrightarrow m'_3 = 5$ anos |
| $C_4 = 2.500 \longrightarrow m_4 = 6$ anos | |

*Resolução:*

a) *1º Conjunto de capitais:*



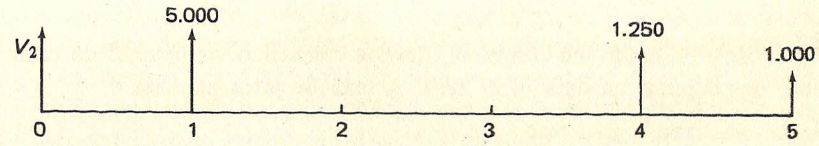

$$V_1 = 5.000\,(1 - 0{,}15 \cdot 2) + 2.500\,(1 - 0{,}15 \cdot 4) + 1.000\,(1 - 0{,}15 \cdot 5) + 2.500\,(1 - 0{,}15 \cdot 6)$$

$$V_1 = 5.000 \cdot (0{,}7) + 2.500 \cdot (0{,}4) + 1.000 \cdot (0{,}25) + 2.500 \cdot (0{,}1)$$

$$V_1 = 3.500 + 1.000 + 250 + 250$$

$$\therefore \; V_1 = \text{Cr\$ } 5.000{,}00$$

b) *2º Conjunto de capitais:*



$$V_2 = 5.000\,(1 - 0{,}15 \cdot 1) + 1.250\,(1 - 0{,}15 \cdot 4) + \\ + 1.000\,(1 - 0{,}15 \cdot 5)$$

$$V_2 = 5.000\,(0{,}85) + 1.250\,(0{,}4) + 1.000\,(0{,}25)$$

$$V_2 = 4.250 + 500 + 250$$

$$\therefore\ V_2 = \text{Cr\$ } 5.000{,}00$$

Como $V_1 = V_2$, podemos concluir que os dois conjuntos de capitais são equivalentes sob o *critério de desconto comercial*, no regime de juros simples.

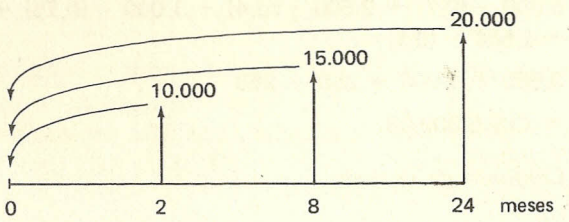
**Nota:** O mesmo conceito pode ser estendido para o critério de desconto bancário, desde que seja utilizado o valor descontado bancário.

## 4. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Uma pessoa possui três títulos aplicados no mercado financeiro, sendo seus valores nominais: Cr$ 10.000,00, Cr$ 15.000,00 e Cr$ 20.000,00. As datas de resgate, tomando-se como referência à data presente (data zero), são, respectivamente: 2 meses, 8 meses e 2 anos. Qual é a soma destes títulos na data focal zero, considerando-se a taxa de juros de 27% a.a. e o critério de desconto racional?

   *Resolução:*

   Para fazermos a soma de dois ou mais capitais referidos a datas diferentes é necessário que antes calculemos o valor destes capitais, à taxa de juros dada, na data focal escolhida. É o que vamos fazer. Contudo, para facilitar a compreensão do problema, consideremos o diagrama de capitais no tempo:




   Conforme indicado no diagrama, deve-se calcular o valor atual de cada um dos capitais na data focal zero. A taxa de juros adotada é:

   $i = 27\%$ a.a.



O valor atual de Cr$ 10.000,00 na data focal zero será:

$$V_2 = \frac{10.000}{1 + (0{,}27)\frac{2}{12}}$$

$$V_2 = \frac{10.000}{1{,}045} = 9.569{,}38$$

O valor atual de Cr$ 15.000,00 na data focal zero será:

$$V_8 = \frac{15.000}{1 + (0{,}27)\frac{8}{12}}$$

$$V_8 = \frac{15.000}{1{,}18} = 12.711{,}86$$

E o valor atual de Cr$ 20.000,00 na data focal zero será:

$$V_{24} = \frac{20.000}{1 + (0{,}27)\frac{24}{12}}$$

$$V_{24} = \frac{20.000}{1{,}54} = 12.987{,}01$$

Portanto, a soma ($V$) dos títulos na data focal zero será:

$$V = V_2 + V_8 + V_{24}$$

$$V = 9.569{,}38 + 12.711{,}86 + 12.987{,}01 = \text{Cr\$ } 35.268{,}25$$

Uma interpretação que se pode dar ao problema ora resolvido é que, considerando

1º) o critério de desconto racional,

2º) a taxa de juros de 27% a.a., e

3º) a data focal zero,

ao possuidor dos títulos é indiferente resgatá-los em suas datas de vencimento ou receber o valor de Cr$ 35.268,25 na data zero, pois os conjuntos de capitais são equivalentes.

2. A aplicação de Cr$ 2.000,00 foi feita pelo prazo de 9 meses contratando-se a taxa de juros de 28% a.a. Além desta aplicação, existe outra de valor nominal de Cr$ 7.000,00, com vencimento a 18 meses. Considerando-se a taxa de juros de 18% a.a. e a data focal 12, qual é a soma das aplicações sob o critério do desconto racional?

*Resolução:*

Inicialmente devemos calcular o valor nominal da aplicação de Cr$ 2.000,00, em sua data de vencimento que é a data 9.

$C = 2.000$

$i = 28\%$ a.a.

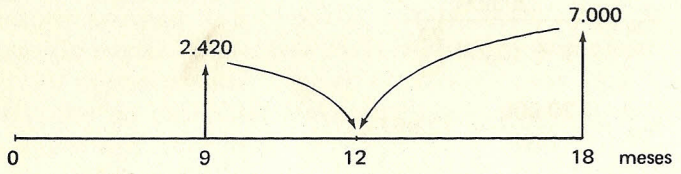
$n = 9$ meses

$$N = C(1 + in)$$

$$N = 2.000\left[1 + (0{,}28)\frac{9}{12}\right]$$

$$N = 2.000\,(1{,}21) = \text{Cr\$ } 2.420{,}00$$

Portanto, o valor nominal da aplicação de Cr$ 2.000,00 na data 9 será de Cr$ 2.420,00. Colocando os valores nominais no diagrama, tem-se:




Nosso problema agora é calcular a soma dos capitais na data 12, considerando-se a taxa de juros de 18% a.a. Neste caso, serão calculados: o valor atual de Cr$ 7.000,00 levando-se em conta o prazo de 6 meses (18 – 12), e o montante de Cr$ 2.420,00 no prazo de 3 meses (12 – 9).

$$S = 2.420\left[1 + (0{,}18)\frac{3}{12}\right] + \frac{7.000}{1 + (0{,}18)\frac{6}{12}}$$

$$S = 2.420\,(1{,}045) + \frac{7.000}{1{,}09}$$

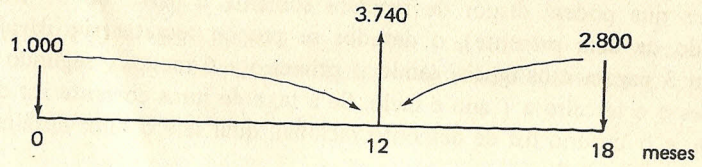
$$S = 2.528{,}90 + 6.422{,}02 = \text{Cr\$ } 8.950{,}92$$

3. Um investidor possui Cr$ 1.000,00 em moeda e um título de valor nominal de Cr$ 2.800,00, com vencimento a 18 meses. Se o critério for de desconto racional, que taxa de juros deve ser considerada para que estes ativos perfaçam Cr$ 3.740,00 na data focal 12 (daqui a um ano)?

*Resolução:*

Graficamente teríamos a seguinte situação:






Devemos, portanto, calcular a taxa de juros que torna a soma dos capitais (Cr$ 1.000,00 e Cr$ 2.800,00) igual a Cr$ 3.740,00 na data focal 12. Em outras palavras, queremos saber qual taxa de juros torna a soma dos dois capitais equivalente a Cr$ 3.740,00, tendo-se como base de comparação a data focal 12.

A equação de valor é:

$$3.740 = 1.000\left(1 + i \cdot \frac{12}{12}\right) + \frac{2.800}{1 + i \cdot \frac{6}{12}}$$

Considerando que: $\frac{6}{12} = 0{,}5$, teremos:

$$3.740 = 1.000\,(1 + i) + \frac{2.800}{1 + 0{,}5i}$$

$$3.740\,(1 + 0{,}5i) = 1.000\,(1 + i)(1 + 0{,}5i) + 2.800$$

$$3.740 + 1.870i = 1.000(1 + 1{,}5i + 0{,}5i^2) + 2.800$$

$$3.740 + 1.870i = 1.000 + 1.500i + 500i^2 + 2.800$$

Eliminando-se os termos semelhantes, esta igualdade fica reduzida à seguinte equação:

$$500i^2 - 370i + 60 = 0$$

Resolvendo esta equação do 2º grau, encontramos duas raízes positivas como solução do problema. As taxas de juros são:

$i_1 = 0{,}24$ ou $i_1 = 24\%$ a.a.

$i_2 = 0{,}50$ ou $i_2 = 50\%$ a.a.

Por conseguinte, a qualquer das duas taxas a soma dos dois capitais, Cr$ 1.000,00 e Cr$ 2.800,00, na data focal de 12, seria igual a Cr$ 3.740,00.

4. O perfil da dívida de certa pessoa consiste nos seguintes compromissos:

a) Cr$ 500,00 a pagar na data presente (data zero);

b) Cr$ 1.524,00 a vencer em 9 meses;

c) Cr$ 3.080,00 a vencer em 1 ano e meio.

Uma vez que poderá dispor de recursos somente a partir do 6º mês (contando da data presente), o devedor se propõe resgatar sua dívida total em 3 pagamentos iguais, sendo o primeiro a 6 meses, o segundo a 12 meses e o terceiro a 1 ano e meio. Se a taxa de juros corrente for de 36% a.a. e o critério for de desconto racional, qual será o valor nominal de cada pagamento?

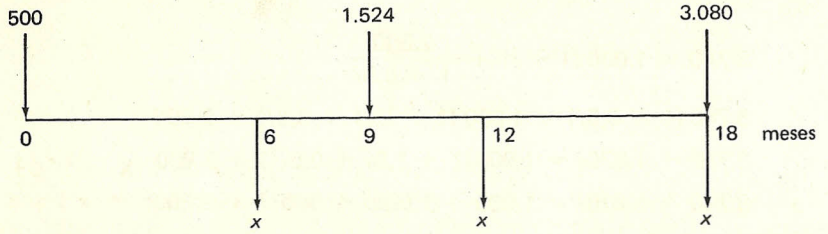
Considerar como data de comparação:

1º) data focal zero

2º) data focal 18 (ou seja, 18º mês)

*Resolução:*

Nosso problema é calcular um novo conjunto composto de três valores nominais iguais, que seja equivalente ao conjunto anterior da dívida, considerando-se suas datas de vencimento. Supondo que o valor nominal de cada pagamento a ser efetuado seja igual a "$x$", teremos o seguinte diagrama:




Como a taxa de juros adotada é de 36% a.a., teremos em cada data focal:

1º) *Data focal zero*

Considerando:

$V_1$ = soma dos valores atuais dos compromissos iguais a 500, 1.524 e 3.080

$V_2$ = soma dos valores atuais dos valores nominais iguais a $x$.

Para que os dois conjuntos sejam equivalentes é necessário que:

$$V_1 = V_2$$

Então:

$$V_1 = 500 + \frac{1.524}{1 + (0{,}36)\frac{9}{12}} + \frac{3.080}{1 + (0{,}36)\frac{18}{12}}$$



$$V_1 = 500 + \frac{1.524}{1{,}27} + \frac{3.080}{1{,}54}$$

$$V_1 = 500 + 1.200 + 2.000 = \text{Cr\$ } 3.700{,}00$$

O segundo conjunto ($V_2$) será:

$$V_2 = \frac{x}{1 + (0{,}36)\frac{6}{12}} + \frac{x}{1 + (0{,}36)\frac{12}{12}} + \frac{x}{1 + (0{,}36)\frac{18}{12}}$$

$$V_2 = \frac{x}{1{,}18} + \frac{x}{1{,}36} + \frac{x}{1{,}54}$$

$$V_2 = x\left(\frac{1}{1{,}18} + \frac{1}{1{,}36} + \frac{1}{1{,}54}\right)$$

$$V_2 = 2{,}232102x$$

Como

$$V_1 = V_2$$

então

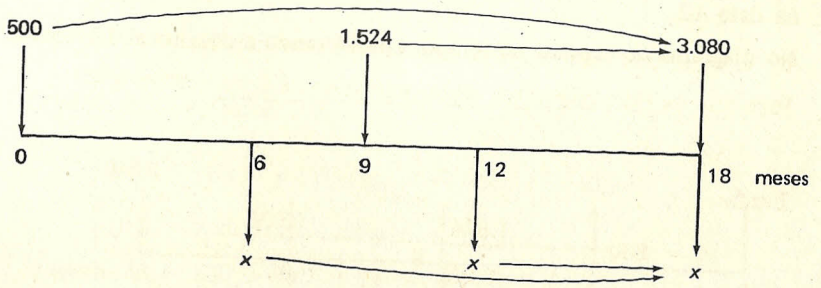
$$3.700 = 2{,}232102x$$

$$x = \frac{3.700}{2{,}232102} = \text{Cr\$ } 1.657{,}63$$

Portanto, a dívida será saldada em três pagamentos de Cr$ 1.657,63, vencendo o primeiro a 6 meses, o segundo a 1 ano e o terceiro a 1 ano e meio.

2º) *Data focal 18*

A resolução segue o mesmo raciocínio apresentado na comparação feita tendo como base a data focal zero. Apenas que, neste caso, a comparação será efetuada na data 18.



Como $V_1$ deve ser igual a $V_2$, tem-se:

$$3.080 + 1.524\left[1 + (0{,}36)\frac{9}{12}\right] + 500\left[1 + (0{,}36)\frac{18}{12}\right] =$$

$$= x + x\left[1 + (0{,}36)\frac{6}{12}\right] + x\left[1 + (0{,}36)\frac{12}{12}\right]$$

$$3.080 + 1.524\,(1{,}27) + 500\,(1{,}54) = x + x\,(1{,}18) + x\,(1{,}36)$$

$$3.080 + 1.935{,}48 + 770{,}00 = x\,(1 + 1{,}18 + 1{,}36)$$

$$5.785{,}48 = 3{,}54x$$

$$x = \frac{5.785{,}48}{3{,}54} = \text{Cr\$ } 1.634{,}32$$

Caso se escolha a data focal 18, o devedor irá pagar três pagamentos iguais de Cr$ 1.634,32.

Como vemos, o resultado de uma equação de valor em juros simples depende da data focal adotada.

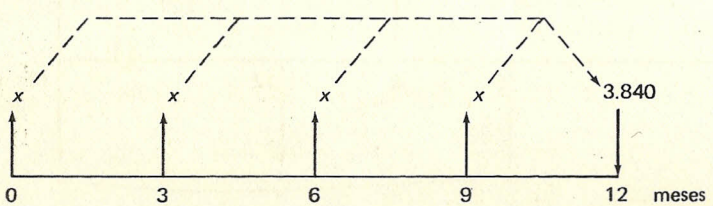
Isto porque os montantes não são cindíveis, conforme visto na parte teórica.

5. Uma pessoa deseja comprar, a vista, um televisor daqui a 1 ano. O lojista lhe garante que o preço, por esta ocasião, será de Cr$ 3.840,00. Como existe um banco que paga juros simples de 32% a.a., o futuro comprador resolve efetuar 4 depósitos iguais trimestrais neste banco, sendo o primeiro hoje e o último 3 meses antes da data da compra. De quanto devem ser os depósitos para que a soma dos depósitos seja igual ao preço do televisor? (Considerar a data focal 12 e o critério de desconto racional.)

*Resolução:*

A solução deste problema é bastante parecida com a do problema nº 4. Aqui queremos saber o valor do depósito trimestral, tal que o conjunto dos quatro valores nominais seja equivalente ao valor de Cr$ 3.840,00 na data 12.

No diagrama de capitais no tempo, considerando a data focal 12, tem-se:






Portanto, a equação de valor será:

$$3.840 = x\left[1 + (0{,}32)\frac{3}{12}\right] + x\left[1 + (0{,}32)\frac{6}{12}\right] +$$

$$+ x\left[1 + (0{,}32)\frac{9}{12}\right] + x\left[1 + (0{,}32)\frac{12}{12}\right]$$

$$3.840 = x(1{,}08) + x(1{,}16) + x(1{,}24) + x(1{,}32)$$

$$3.840 = x(1{,}08 + 1{,}16 + 1{,}24 + 1{,}32)$$

$$3.840 = 4{,}80x$$

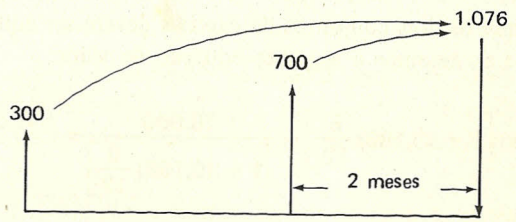
$$x = \frac{3.840}{4{,}80} = \text{Cr\$ } 800{,}00$$

Em conclusão, se forem efetuados 4 depósitos de Cr$ 800,00 nas datas previstas, o cliente possuirá por ocasião da compra do televisor o valor nominal de Cr$ 3.840,00, considerando-se a data focal 12 e a taxa de juros de 32% a.a.

6. A soma de dois títulos em certa data focal, considerando-se a taxa de desconto racional de 24% a.a., é de Cr$ 1.076,00. Em seus vencimentos seqüenciais, eles são, respectivamente, de Cr$ 300,00 e de Cr$ 700,00. Qual será o prazo entre a data focal e o vencimento do título de Cr$ 300,00 se o vencimento do título de Cr$ 700,00 anteceder a data focal em 2 meses?

*Resolução:*

No diagrama de capitais no tempo, teremos:




Sendo a taxa de juros 24% a.a., a equação de valor será:

$$1.076 = 700\left[1 + (0{,}24)\frac{2}{12}\right] + 300\left[1 + (0{,}24)\frac{n}{12}\right]$$

$$1.076 = 700\,(1{,}04) + 300[1 + (0{,}02)n]$$

$$1.076 = 728 + 300 + 6n$$

$$48 = 6n$$

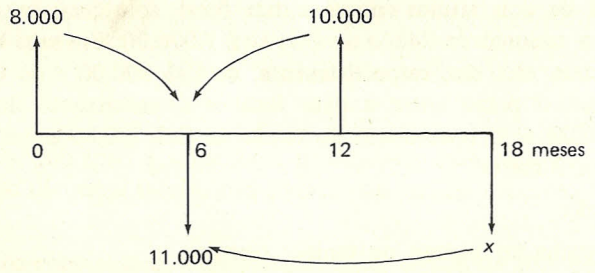
$$\therefore\ n = \frac{48}{6} = 8 \text{ meses}$$

Portanto, o prazo entre a data de vencimento do título de Cr$ 300,00 e a data focal é de 8 meses, sendo de 2 meses o prazo para o segundo título (Cr$ 700,00).

7. Uma pessoa devendo Cr$ 8.000,00 hoje e Cr$ 10.000,00 em um ano propõe a substituição destes títulos por um de Cr$ 11.000,00 em 6 meses e outro com vencimento em 1 ano e meio. Sabendo-se que a taxa de juros é de 18,6% a.a., qual será o valor do segundo pagamento? (Considerar a data focal 6 e o critério de desconto racional.)

*Resolução:*

Sendo o valor do segundo pagamento igual a "$x$" e considerando a data focal 6, teremos o seguinte diagrama:




Uma vez que os dois conjuntos de capitais devem ser equivalentes à taxa de 18,6% a.a., teremos a seguinte equação de valor:

$$8.000\left[1 + (0{,}186)\frac{6}{12}\right] + \frac{10.000}{\left[1 + (0{,}186)\frac{6}{12}\right]} =$$

$$= 11.000 + \frac{x}{\left[1 + (0{,}186)\frac{12}{12}\right]}$$

$$8.000\,(1{,}093) + \frac{10.000}{1{,}093} = 11.000 + \frac{x}{1{,}186}$$

$$8.744{,}00 + 9.149{,}13 = 11.000 + \frac{x}{1{,}186}$$



$$17.893{,}13 - 11.000 = \frac{x}{1{,}186}$$

$$x = 6.893{,}13\,(1{,}186) = \text{Cr\$ } 8.175{,}25$$

Por conseguinte, o conjunto de capitais (Cr$ 8.000,00 hoje e Cr$ 10.000,00 a 1 ano) é equivalente a Cr$ 11.000,00 a 6 meses mais Cr$ 8.175,25 a 1 ano e meio.

8. Um banco propõe a uma empresa dois esquemas de pagamento, conforme demonstrado no quadro abaixo:

| Esquema A | | Esquema B | |
|---|---|---|---|
| 01/01/76 | Cr$ 2.500,00 | 01/01/76 | Cr$ 1.000,00 |
| 01/03/76 | Cr$ 3.000,00 | 01/07/76 | Cr$ 5.000,00 |
| 01/05/76 | Cr$ 4.000,00 | 01/01/77 | Cr$ 4.616,77 |

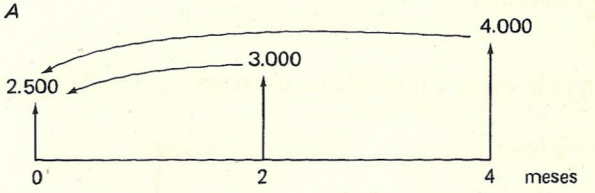
Sabendo-se que a taxa de juros de mercado é de 27% a.a. e que o desconto racional é o critério adotado, pergunta-se: Algum dos esquemas é melhor que o outro? (Considerar a data focal zero.)

*Resolução:*

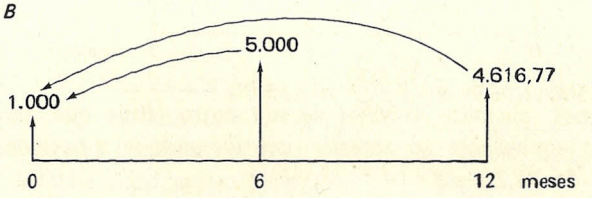
Um dos esquemas será melhor que o outro se a soma dos valores atuais deste esquema for menor que a soma dos valores atuais do outro, considerando-se a data focal zero.

Fazendo a data 01/01/76 igual à data zero e considerando os prazos em meses, teríamos graficamente os dois esquemas:

*Esquema A*




*Esquema B*



Seja $V_1$ a soma dos valores atuais, na data zero, dos valores do financiamento "Esquema A", à taxa de 27% a.a.:

$$V_1 = 2.500 + \frac{3.000}{1 + (0,27)\frac{2}{12}} + \frac{4.000}{1 + (0,27)\frac{4}{12}}$$

$$V_1 = 2.500 + \frac{3.000}{1,045} + \frac{4.000}{1,09}$$

$$V_1 = 2.500 + 2.870,81 + 3.669,72 = \text{Cr\$ } 9.040,53$$

Analogamente, seja $V_2$ a soma dos valores atuais do "Esquema B":

$$V_2 = 1.000 + \frac{5.000}{1 + (0,27)\frac{6}{12}} + \frac{4.616,77}{1 + (0,27)\frac{12}{12}}$$

$$V_2 = 1.000 + \frac{5.000}{1,135} + \frac{4.616,77}{1,27}$$

$$V_2 = 1.000 + 4.405,28 + 3.635,25 = \text{Cr\$ } 9.040,53$$

Uma vez que

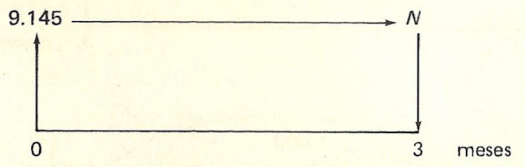
$$V_1 = V_2$$

concluímos que os dois esquemas são equivalentes, considerando-se a data focal zero e a taxa de juros de 27% a.a. Em outras palavras, não existe esquema melhor que o outro.

9. O possuidor de um título, com vencimento em 30/08/76, no valor de Cr$ 9.145,00, obteve sua renovação para 30/11/76. Sendo a taxa de desconto comercial igual a 34,2% a.a., qual será o valor do novo título? (desconto comercial)

*Resolução:*

Considerando o prazo entre as duas datas em termos de meses, tem-se:




Calcularemos, portanto, o valor de um outro título que, por sua vez, deverá ser equivalente ao anterior, considerando-se a taxa de desconto comercial de 34,2% a.a.



Temos então:

$V_c = 9.145$

$i = 34,2\%$ a.a.

$n = 3$ meses

$$N = \frac{V_c}{1 - in}$$

$$N = \frac{9.145}{1 - (0,342)\frac{3}{12}}$$

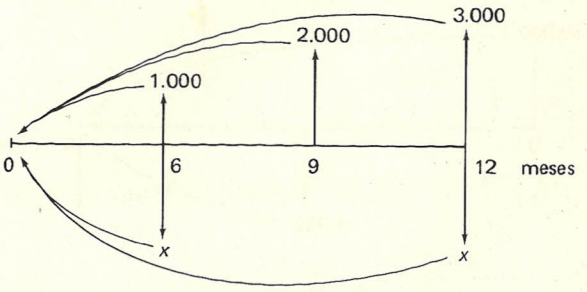
$$N = \frac{9.145}{0,9145} = \text{Cr\$ } 10.000,00$$

O valor do novo título que substitui o anterior é, por conseguinte, de Cr$ 10.000,00.

10. Uma empresa deve pagar Cr$ 1.000,00 daqui a 6 meses, Cr$ 2.000,00 em 9 meses e Cr$ 3.000,00 em 12 meses. O banco, cuja taxa de juros é de 45% a.a., aceita a liquidação da dívida em dois pagamentos iguais, sendo o primeiro em 6 meses e o segundo em 12 meses. Qual é o valor dos pagamentos, uma vez que foram adotados o critério do desconto comercial e a data focal zero?

*Resolução:*

Seja "$x$" o valor de cada um dos dois pagamentos desconhecidos. Então, o diagrama de capitais no tempo será:




Como a data focal escolhida foi a data zero, devemos calcular os valores atuais comerciais na data zero. Para que os dois conjuntos de capitais sejam equivalentes é necessário que a soma dos valores atuais de cada conjunto, na data focal, sejam iguais.

Portanto, considerando a taxa de juros de 45% a.a., teremos a seguinte equação de valor:

$$1.000\left[1 - (0{,}45)\frac{6}{12}\right] + 2.000\left[1 - (0{,}45)\frac{9}{12}\right] +$$

$$+ 3.000\left[1 - (0{,}45)\frac{12}{12}\right] = x\left[1 - (0{,}45)\frac{6}{12}\right] + x\left[1 - (0{,}45)\frac{12}{12}\right]$$

$$1.000(0{,}775) + 2.000(0{,}6625) + 3.000(0{,}55) =$$

$$= x(0{,}775) + x(0{,}55)$$

$$775 + 1.325 + 1.650 = x(0{,}775 + 0{,}55)$$

$$3.750 = 1{,}325x$$

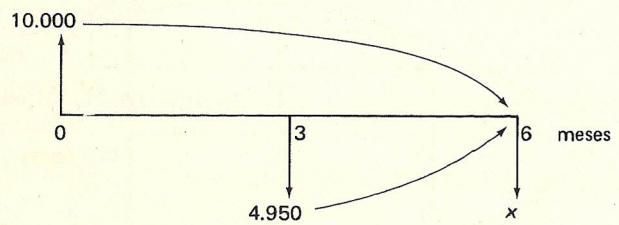
$$\therefore\ x = \frac{3.750}{1{,}325} = \text{Cr\$ } 2.830{,}19$$

A empresa substituirá os três pagamentos anteriores por 2 de Cr$ 2.830,19, vencendo o primeiro em 6 meses e o segundo em 1 ano.

11. Uma loja vende um jogo de sofás por Cr$ 10.000,00 a vista. O gerente da loja oferece um plano a prazo, onde o cliente paga Cr$ 4.950,00 em 3 meses e o restante em 6 meses. De quanto será o segundo pagamento se a loja considerar o critério do desconto comercial e sua taxa for de 40% a.a.? (Usar a data focal 6 – 6º mês.)

*Resolução:*

Graficamente temos:




Levando os valores para a data focal 6 e considerando a taxa de desconto comercial de 40% a.a., teremos a equação de valor:

$$\frac{10.000}{\left[1 - (0{,}40)\frac{6}{12}\right]} = x + \frac{4.950}{\left[1 - (0{,}40)\frac{3}{12}\right]}$$



$$\frac{10.000}{0{,}80} = x + \frac{4.950}{0{,}90}$$

$$12.500 = x + 5.500$$

$$\therefore\ x = 12.500 - 5.500 = \text{Cr\$ } 7.000{,}00$$

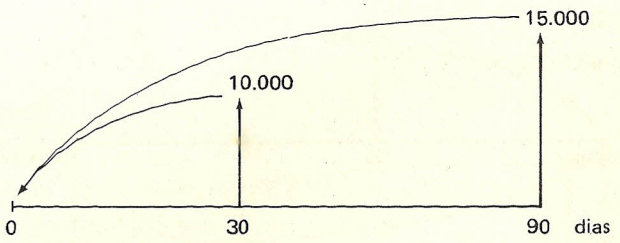
Portanto, para o gerente da loja é indiferente vender o jogo de sofás por Cr$ 10.000,00 a vista ou a prazo em dois pagamentos trimestrais, sendo o primeiro de Cr$ 4.950,00 e o segundo de Cr$ 7.000,00. Isto porque as alternativas são equivalentes, considerando-se a taxa de desconto de 40% a.a. e a data focal 6.

12. Uma dívida é composta de um título de Cr$ 10.000,00, vencendo em 30 dias, e de outro no valor de Cr$ 15.000,00, vencendo em 90 dias. Esta dívida foi substituída por um único título de Cr$ 28.475,61, tendo sido empregada a taxa de desconto comercial de 36% a.a. Considerando-se a data focal zero para a comparação, qual é o prazo de vencimento do novo título?

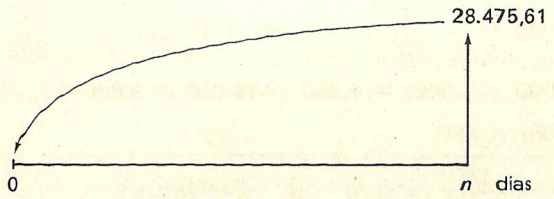
*Resolução:*

Sabemos que o novo título deve ser equivalente à dívida anterior, considerando-se a data focal zero e a taxa de desconto comercial de 36% a.a.

O valor atual comercial da dívida anterior será:




E o valor atual comercial do novo título:



Portanto, teremos a seguinte equação de valor:

$$28.475{,}61\left[1 - (0{,}36)\frac{n}{360}\right] = 10.000\left[1 - (0{,}36)\frac{30}{360}\right] +$$

$$+ 15.000\left[1 - (0{,}36)\frac{90}{360}\right]$$

$$28.475{,}61 - 28{,}47561n = 10.000\,(0{,}97) + 15.000\,(0{,}91)$$

$$28.475{,}61 - 28{,}47561n = 9.700 + 13.650$$

$$n = \frac{5.125{,}61}{28{,}47561}$$

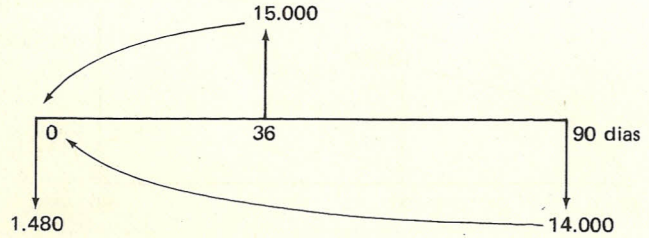
$$\therefore\ n = 180 \text{ dias}$$

O novo título deverá, por conseguinte, vencer a 180 dias da data focal (zero).

13. Para refinanciar um compromisso de Cr$ 15.000,00 em 36 dias, o devedor paga Cr$ 1.480,00 e assina um novo título de Cr$ 14.000,00 para 90 dias. Qual foi a taxa de desconto comercial adotada nesta operação? (Considerar data focal zero.)

*Resolução:*

O diagrama de capitais no tempo será:




A taxa de desconto comercial anual que torna os conjuntos de capitais equivalentes será tal que:

$$15.000\left(1 - \frac{36}{360}i\right) = 1.480 + 14.000\left(1 - \frac{90}{360}i\right)$$

$$15.000 - 1.500i = 1.480 + 14.000 - 3.500i$$

$$2.000i = 480$$

$$\therefore\ i = \frac{480}{2.000} = 0{,}24 \quad \text{ou} \quad i = 24\% \text{ a.a.}$$

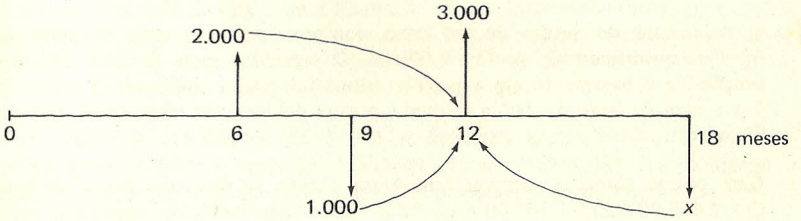


14. Dois títulos, um para 6 meses e outro para 12 meses, de Cr$ 2.000,00 e Cr$ 3.000,00 respectivamente foram substituídos por dois outros, sendo o primeiro de Cr$ 1.000,00 para 9 meses e o segundo para 1 ano e meio. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial adotada foi de 18% a.a., qual será o valor do título de 1 ano e meio? Escolher a data focal 12 para a comparação.

*Resolução:*

Assim como em problemas anteriores, devemos considerar a equivalência dos conjuntos de capitais.

No diagrama, temos:




Considerando-se a data focal 12 e a taxa de desconto comercial de 18% a.a., a equação de valor será:

$$\frac{2.000}{1 - (0{,}18)\frac{6}{12}} + 3.000 = \frac{1.000}{1 - (0{,}18)\frac{3}{12}} + x\left[1 - (0{,}18)\frac{6}{12}\right]$$

$$\frac{2.000}{0{,}91} + 3.000 = \frac{1.000}{0{,}955} + x(0{,}91)$$

$$2.197{,}80 + 3.000 = 1.047{,}12 + x(0{,}91)$$

$$4.150{,}68 = x(0{,}91)$$

$$\therefore\ x = \frac{4.150{,}68}{0{,}91} = \text{Cr\$ } 4.561{,}19$$

Portanto, o segundo título, com vencimento em 1 ano e meio, será de Cr$ 4.561,19.

## 5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Uma empresa deve três títulos, pagáveis em 6, 12 e 18 meses, com valores respectivamente de Cr$ 4.500,00, Cr$ 6.000,00 e Cr$ 6.870,00. Verificando que apenas

a 12 meses possuirá recursos disponíveis, propõe ao banco liquidar os três títulos nesta data. Qual será o valor deste pagamento, se a taxa de juros for de 29% a.a. e a data focal 12? (Desconto racional.)

2. Pedro comprou um carro de um amigo, combinando que o pagamento seria feito em duas parcelas, uma de Cr$ 6.000,00 para 3 meses e outra de Cr$ 12.000,00 para 6 meses. Quando foi assinar as duas promissórias, Pedro propôs uma alternativa: pagar Cr$ 10.000,00 em 4 meses e o restante em 12 meses. Se a taxa corrente for de 24% a.a., qual o valor do segundo pagamento? (Data focal 0 (zero) e critério de desconto racional.)

3. Uma loja X anuncia que vende a geladeira Alfa por Cr$ 1.810,29 a vista ou em dois pagamentos mensais, sendo o primeiro para 3 meses e o segundo para 4 meses. Sabendo-se que a taxa de juros corrente é de 36% a.a., qual é o valor das mensalidades? (Data focal zero e critério de desconto racional.)

4. O pagamento do seguro de um carro, conforme contrato, deve ser feito em 3 parcelas quadrimestrais de Cr$ 3.000,00. O segurador, para facilitar seu cliente, propõe-lhe o pagamento em 4 parcelas trimestrais iguais. Utilizando-se a data focal 0 e a taxa de juros de 24% a.a., qual é o valor das parcelas trimestrais? (Desconto racional.)

5. Uma pessoa planejou comprar uma blusa e após 30 dias, um terno, de valores Cr$ 1.000,00 e Cr$ 1.800,00 respectivamente. O gerente da loja sugere que, embora uma compra seja feita hoje e a seguinte após 1 mês, o cliente pague em 5 parcelas iguais, vencendo a primeira 3 meses após a compra do terno. Considerar a taxa de juros de 30% a.a. e como data focal a data de vencimento da 5ª parcela. Achar o valor das parcelas. (Desconto racional.)

6. Um rádio custa Cr$ 639,28 a vista ou, conforme diz o anúncio de propaganda, o cliente pode pagá-lo em 3 parcelas mensais de Cr$ 100,00 (1ª), Cr$ 200,00 (2ª) e Cr$ 400,00 (3ª), sem dar entrada alguma. Qual é a taxa de juros considerada? (Data focal 3 e critério de desconto racional.)

7. Quatro pagamentos mensais de Cr$ 100,00 vencendo o primeiro daqui a um mês são substituídos por dois bimensais de Cr$ 202,38 sendo o 1º para dois meses. Se chamarmos de data 4 a do pagamento da última parcela mensal e então adotarmos a data focal 4, qual será a taxa de juros envolvida nesta substituição? (Desconto racional.)

8. Uma aplicação deve maturar dentro de 60 dias, sendo seu valor de resgate de Cr$ 1.000,00. Caso se desejasse substituir este título por outro vencível em 90 dias, qual seria o valor do novo título, adotando-se a taxa de desconto comercial de 24% a.a. e a data focal atual?

9. A empresa Beta com Nota Promissória de Cr$ 10.000,00, vencendo em 90 dias, propõe antecipação por um título de Cr$ 9.487,18. Se a data focal adotada for a atual (data zero) e a taxa de desconto comercial for de 30% a.a., qual será o prazo de antecipação?

10. João planeja substituir seus três títulos de Cr$ 1.000,00, Cr$ 2.000,00 e Cr$ 3.000,00, respectivamente com os prazos de vencimento de 30, 60 e 90 dias, por um único título vencível em 180 dias. Qual será o valor deste título, uma vez que a taxa de desconto comercial é de 36% a.a. e a data focal escolhida é a do vencimento deste novo título?

11. Pedro recebeu a oferta de um terreno que poderia ser pago em 4 parcelas iguais, sendo a primeira dada como entrada e as três seguintes quadrimestrais. Embora não possua este dinheiro hoje, Pedro tem três aplicações com valor de resgate de Cr$ 10.000,00 cada uma. Seus prazos de vencimento, a partir de hoje, são: 6 meses, 1 ano e 18 meses. O vendedor do terreno diz aceitar as três aplicações pelas quatro parcelas que Pedro deveria pagar. Qual é o valor das parcelas, uma vez que foi considerada como data focal a do vencimento da última aplicação e a taxa de desconto comercial adotada foi de 18% a.a.?

12. O pagamento de uma motocicleta pode ser feito em 3 parcelas mensais de Cr$ 5.000,00, Cr$ 6.000,00 e Cr$ 9.000,00, vencendo respectivamente em 1, 2 e 3 meses. O gerente da loja, com a finalidade de aumentar suas vendas, anuncia que quem quiser poderá dar uma entrada de Cr$ 6.000,00 e pagar o restante em 3 meses. Qual será o valor deste último pagamento, se a taxa de desconto comercial for de 33% a.a. e a data focal escolhida for a da entrada?

13. Dois títulos de Cr$ 100,00 e Cr$ 300,00, vencíveis em 30 e 60 dias respectivamente, foram substituídos por um de Cr$ 419,56 vencível em 120 dias. Tomando-se a data atual como focal, qual foi a taxa de desconto comercial adotada?

14. João propõe a substituição de suas promissórias de Cr$ 1.500,00 e Cr$ 2.000,00, vencíveis respectivamente em 2 e 4 meses, por duas outras de Cr$ 2.000,00 e Cr$ 1.646,34, com os prazos de 3 e 6 meses. Supondo-se que a data focal seja a atual, qual é a taxa de desconto comercial aplicada nesta operação?

**Respostas**

1. Cr$ 17.152,50
2. Cr$ 8.823,10
3. Cr$ 1.000,00
4. Cr$ 2.230,08
5. Cr$ 631,43
6. 48% a.a.
7. 29,26% a.a.
8. Cr$ 1.021,28
9. 60 dias
10. Cr$ 6.745,90
11. Cr$ 6.757,02
12. Cr$ 13.940,05
13. 24% a.a.
14. 36% a.a.

Parte II

# JUROS COMPOSTOS

# 4

# Juro e Montante

Já foi analisado o regime de juros simples, caracterizado pelo fato de apenas o capital inicial render juros e este ser diretamente proporcional ao tempo e à taxa.

No regime de *juros compostos*, que tem grande importância financeira por retratar melhor a realidade, o juro gerado pela aplicação será incorporado à mesma passando a participar da geração de juros no período seguinte. Dizemos então que os juros são capitalizados, e como não só o capital inicial rende juros mas estes são devidos também sobre os juros formados anteriormente, temos o nome de juros compostos.

## 1. DIFERENÇA ENTRE OS REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO

A diferença entre um regime e outro pode ser mais facilmente verificada através de um exemplo: seja um principal de Cr$ 1.000,00 aplicado à taxa de 20% a.a. por um período de 4 anos a juros simples e compostos.

Temos: $C_0 = 1.000,00$

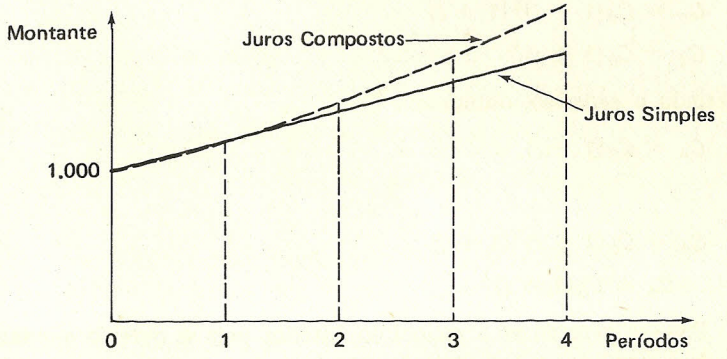
$i = 20\%$ a.a.

$n = 4$ anos



| $n$ | *Juros simples* | | *Juros compostos* | |
|---|---|---|---|---|
| | *Juro por período* | *Montante* | *Juro por período* | *Montante* |
| 1 | 1.000 × 0,2 = 200 | 1.200 | 1.000 × 0,2 = 200 | 1.200 |
| 2 | 1.000 × 0,2 = 200 | 1.400 | 1.200 × 0,2 = 240 | 1.440 |
| 3 | 1.000 × 0,2 = 200 | 1.600 | 1.440 × 0,2 = 288 | 1.728 |
| 4 | 1.000 × 0,2 = 200 | 1.800 | 1.728 × 0,2 = 346 | 2.074 |

O gráfico a seguir permite uma comparação visual entre os montantes no regime de juros simples e de juros compostos. Verificamos que a formação do montante em juros simples é *linear* e em juros compostos é *exponencial:*




## 2. MONTANTE

Recalculemos o montante de Cr$ 2.074,00 obtido no exemplo anterior, utilizando uma notação literal:

$$C_1 = C_0(1 + i) = 1.000\,(1,2) = 1.200$$

$$C_2 = C_1(1 + i) = 1.200\,(1,2) = 1.440$$

$$C_3 = C_2(1 + i) = 1.440\,(1,2) = 1.728$$

$$C_4 = C_3(1 + i) = 1.728\,(1,2) \cong 2.074$$

Constata-se que o cálculo do montante pode ser feito facilmente passo a passo, desde que se utilize em cada período o montante do período anterior. Tal modo de calcular o montante pode ser utilizado eficientemente quando se tem o recurso de máquinas de calcular.

Entretanto, pode-se obter a fórmula do montante substituindo, no exemplo anterior, os resultados já achados:

$$C_1 = C_0(1 + i)$$

$$C_2 = C_1(1 + i)$$

Substituindo-se o valor de $C_1$ na segunda expressão, tem-se:

$$C_2 = C_0(1 + i)(1 + i)$$

$$C_2 = C_0(1 + i)^2$$

De modo análogo, temos:

$$C_3 = C_2(1 + i)$$

E, substituindo-se o valor já calculado de $C_2$, tem-se:

$$C_3 = C_0(1 + i)^2(1 + i)$$

$$C_3 = C_0(1 + i)^3$$

Repetindo o processo, obtém-se:

$$C_4 = C_3(1 + i)$$

Ou:

$$C_4 = C_0(1 + i)^3(1 + i)$$

$$\therefore C_4 = C_0(1 + i)^4$$

Pode-se generalizar o raciocínio anterior para se obter o montante ao final de $n$ períodos à taxa $i$ de juros:

$$\boxed{C_n = C_0(1 + i)^n} \qquad (19)$$

Nesta fórmula, a taxa de juros $i$ refere-se à mesma medida de tempo utilizada para os $n$ períodos e, além disto, deve ser expressa na forma unitária porque estamos operando algebricamente. O leitor deve observar que a fórmula (19) exprime o montante, ao fim de $n$ períodos, como uma *função exponencial* do capital inicial aplicado.

*Exemplo:* Uma pessoa toma Cr$ 1.000,00 emprestado a juros de 2% a.m. pelo prazo de 10 meses com capitalização composta. Qual o montante a ser devolvido?

*Resolução:*

$C_0 = 1.000$ $\qquad$ $n = 10$ meses

$i = 2\%$ a.m.



Temos:

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

Portanto:

$$C_{10} = C_0(1 + i)^{10}$$

$$C_{10} = 1.000(1 + 0{,}02)^{10}$$

$$C_{10} = 1.000(1{,}02)^{10}$$

$$C_{10} = 1.000(1{,}218994)$$

$$\therefore C_{10} = \text{Cr\$ } 1.218{,}99$$

## 3. CÁLCULO DO JURO

Sabemos que o *montante* é igual à soma do principal ($C_0$) aos juros que a aplicação rende, no prazo considerado e à taxa de juros estipulada.

Calculemos os juros, período a período, do exemplo de juros compostos dado no quadro do item 1:

No primeiro período:

$$J_1 = C_1 - C_0$$

$$J_1 = 1.200 - 1.000 = 200$$

O valor dos juros devidos nos dois períodos iniciais é:

$$J_2 = C_2 - C_0$$

$$J_2 = 1.440 - 1.000 = 440$$

É fácil calcular os juros nos quatro períodos iniciais:

$$J_4 = C_4 - C_0$$

$$J_4 = 2.074 - 1.000 = 1.074$$

Para $n$ períodos, podemos inferir que:

$$J_n = C_n - C_0$$

Mas, sendo

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

temos:

$$J_n = C_0(1 + i)^n - C_0 \quad \therefore \quad \boxed{J_n = C_0[(1 + i)^n - 1]} \qquad (20)$$

A separação entre juros e principal apresenta aspectos práticos importantes, por exemplo, nos abatimentos fiscais que os juros geram para as pessoas física e jurídica.

*Exemplo:* Qual o juro pago no caso do empréstimo de Cr$ 1.000,00 à taxa de juros compostos de 2% a.m. e pelo prazo de 10 meses?

*Resolução:*

$C_0 = 1.000$

$i = 2\%$ a.m.

$n = 10$

Como:

$$J_n = C_0[(1 + i)^n - 1]$$

Temos:

$$J_{10} = 1.000[(1 + 0{,}02)^{10} - 1]$$

$$J_{10} = 1.000[(1{,}02)^{10} - 1]$$

$$J_{10} = 1.000[1{,}21899 - 1]$$

$$J_{10} = 1.000[0{,}21899]$$

$$\therefore J_{10} = \text{Cr\$ } 218{,}99$$

## 4. VALOR ATUAL E VALOR NOMINAL

O montante de um capital ($C_0$) aplicado na data zero, à taxa de juros compostos ($i$), após $n$ períodos, conforme já vimos, será dado por:

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

O *valor atual*, como já visto em juros simples, corresponde ao valor da aplicação em uma dada data inferior à do vencimento.

Vejamos este conceito aplicado ao regime de juros compostos: seja o montante dado ($C_n$), queremos saber qual é o valor atual do compromisso na data zero.

Sejam: $V$ = *valor atual* na data zero ($C_0$)

$N$ = *valor nominal* na data $n$ ($C_n$)

Tem-se:

$$N = V(1 + i)^n$$



Dividindo-se os dois membros por $(1 + i)^n$:

$$\frac{N}{(1 + i)^n} = \frac{V\cancel{(1 + i)^n}}{\cancel{(1 + i)^n}}$$

Logo:

$$\boxed{V = \frac{N}{(1 + i)^n}} \qquad (21)$$

Deve ficar claro ao leitor que o valor atual pode ser calculado em qualquer data focal inferior à do montante, não precisando ser necessariamente a data zero que utilizamos na explicação. Constatamos que o cálculo do valor atual é apenas uma operação inversa do cálculo do montante. Nestas condições, o valor atual, aplicado à taxa de juros compostos contratada ($i$), da data do valor atual até à data do vencimento, reproduz o *valor nominal*.

Vejamos alguns exemplos:

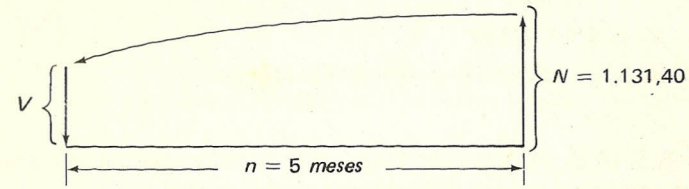
a) Por quanto devo comprar um título, vencível daqui a 5 meses, com valor nominal de Cr$ 1.131,40, se a taxa de juros compostos corrente for de 2,5% a.m.?

*Resolução:*

$N = 1.131{,}40$

$i = 2{,}5\%$ a.m.

$n = 5$ meses




$$V = \frac{N}{(1 + i)^n}$$

$$V = \frac{1.131{,}40}{(1{,}025)^5} \cong \frac{1.131{,}40}{1{,}131408}$$

$$V \cong \text{Cr\$ } 1.000{,}00$$

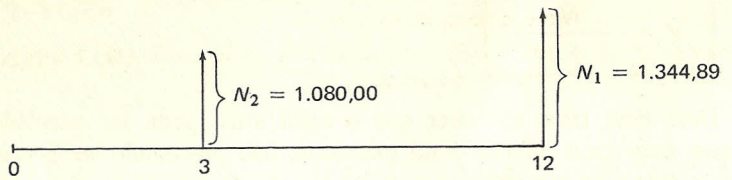
Portanto, se comprar o título por Cr$ 1.000,00, não estarei fazendo mau negócio.

b) Uma pessoa possui uma letra de câmbio que vence daqui a 1 ano, com valor nominal de Cr$ 1.344,89. Foi-lhe proposta a troca daquele título por outro, vencível daqui a

3 meses e no valor de Cr$ 1.080,00. Sabendo-se que a taxa corrente de mercado é de 2,5% a.m., pergunta-se se a troca proposta é vantajosa.

*Resolução:*

Um método simples é fazer a comparação dos dois títulos em uma mesma data focal, calculando-se seus valores atuais. Adotemos como data focal, a data zero:




O valor atual na data focal zero da letra de câmbio que vence em 12 meses é dado por:

$$V_1 = \frac{N_1}{(1+i)^{12}} = \frac{1.344,89}{(1,025)^{12}}$$

$$V_1 = \frac{1.344,89}{1,344889} \cong 1.000,00$$

$$\therefore \; V_1 = \text{Cr\$ } 1.000,00$$

Calculemos agora o valor atual na data zero, da letra que vence em 3 meses:

$$V_2 = \frac{N_2}{(1+i)^3} = \frac{1.080,00}{(1,025)^3}$$

$$V_2 = \frac{1.080,00}{1,076891}$$

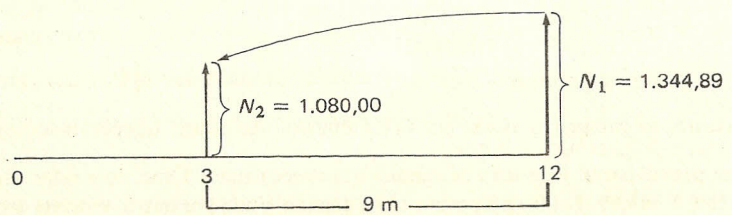
$$V_2 \cong \text{Cr\$ } 1.002,89$$

Comparando os dois valores atuais constatamos que:

$$V_2 > V_1$$

Ou seja, o título que vence em 3 meses tem um *valor atual um pouco maior* que o que vence em 12 meses. Portanto, a troca seria vantajosa.

Um modo mais simples para resolver-se o problema, seria calcular o valor atual do compromisso que vence em 12 meses, na data de vencimento da letra de 3 meses:






$$V'_1 = \frac{N_1}{(1+i)^9} = \frac{1.344,89}{(1,025)^9}$$

$$V'_1 = \frac{1.344,89}{1,248863}$$

$$V'_1 = \text{Cr\$ } 1.076,89$$

Este valor é *menor* que os Cr$ 1.080,00 que a outra pessoa prometeu dar em troca na mesma data e, portanto, a transação é vantajosa.

**Sugestão:** O leitor deve fazer a comparação também na data focal 12 para dominar completamente este tipo de raciocínio.

## 5. TAXAS EQUIVALENTES

Dizemos que duas taxas são equivalentes se, considerados o mesmo prazo de aplicação e o mesmo capital, for indiferente aplicar em uma ou em outra. De outro modo, considerando-se um mesmo capital aplicado por um mesmo intervalo de tempo a cada uma das taxas, ambas as taxas produzirão um mesmo montante se forem equivalentes.

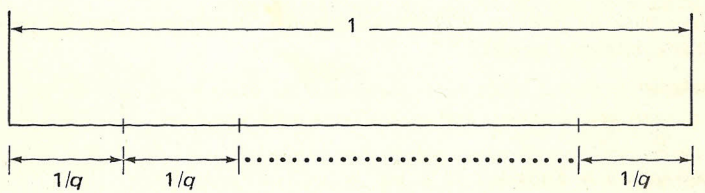
Sejam as taxas:

$i$ = referente a um intervalo de tempo $p$.

$i_q$ = correspondente a um intervalo de tempo igual à fração própria $p/q$ $(q > p)$.

Para facilitar o raciocínio vamos admitir que $p = 1$ e, portanto, $p/q = 1/q$.

A fração $1/q$ pode ser visualizada do seguinte modo:




Ou seja, o intervalo de tempo unitário foi dividido em $q$ partes iguais.

Admitindo-se um capital $C_0$ que será aplicado às duas taxas, temos o montante:

Após 1 período, à taxa $i$:

$$C_1 = C_0(1+i)^1$$

Aplicando o mesmo capital $C_0$ por $q$ períodos, à taxa $i_q$, para que dê o mesmo intervalo de aplicação da taxa anterior, tem-se:

$$C_q = C_0(1 + i_q)^q$$

Para que as taxas sejam equivalentes, devemos ter:

$$C_1 = C_q$$

Portanto:

$$C_0(1 + i) = C_0(1 + i_q)^q$$

$$(1 + i) = (1 + i_q)^q$$

Elevando-se os dois membros a $1/q$:

$$\left[(1 + i_q)^q\right]^{1/q} = [(1 + i)]^{1/q}$$

$$(1 + i_q)^{q/q} = (1 + i)^{1/q}$$

$$1 + i_q = \sqrt[q]{1 + i}$$

$$\boxed{i_q = \sqrt[q]{1 + i} - 1} \qquad (22)$$

No apêndice é demonstrada esta fórmula sem a restrição de que um dos intervalos seja unitário.

Os exemplos seguintes permitirão que se entenda melhor a fórmula e o conceito de taxas equivalentes.

*Exemplos:*

a) Dada a taxa de juros de 9,2727% ao trimestre, determinar a taxa de juros compostos equivalente mensal.

*Resolução:*

$$i_q = \sqrt[q]{1 + i} - 1$$

Sendo que: $q = 3$ meses

$i = 9{,}2727\%$ a.t.

Portanto:

$$i_3 = \sqrt[3]{1 + 0{,}092727} - 1$$

$$i_3 = \sqrt[3]{1{,}092727} - 1$$

$$i_3 = 1{,}03 - 1$$

$$\therefore\ i_3 = 0{,}03 \text{ a.m.} \quad \text{ou} \quad i_3 = 3\% \text{ a.m.}$$



b) Suponhamos que: $C_0 = 1.000{,}00$

$i_q = 2\%$ a.m.

$i = 26{,}824\%$ a.a.

$n = 1$ ano

Verificar se $i$ e $i_q$ são equivalentes.

*Resolução:*

Para verificar se as duas taxas são equivalentes, vamos aplicar o capital de Cr$ 1.000,00 pelo mesmo prazo. Vamos adotar 1 ano, que é o período de aplicação correspondente à taxa $i$.

O montante à taxa $i$, é:

$$C_1 = 1.000\,(1{,}26824)$$

$$C_1 = \text{Cr\$ } 1.268{,}24$$

Calculando-se o montante em 12 meses para a taxa $i_q$, tem-se:

$$C'_1 = 1.000\,(1{,}02)^{12}$$

$$C'_1 = 1.000\,(1{,}268242)$$

Logo:

$$C'_1 \cong \text{Cr\$ } 1.268{,}24$$

Portanto, como $C_1 = C'_1$, podemos concluir que a taxa de 2% a.m. é *equivalente* à taxa de 26,824% ao ano.

Note-se que esta taxa é *maior* que a taxa equivalente obtida a juros simples (ou seja: 2% × 12 m = 24% ao ano).

c) Se um capital de Cr$ 1.000,00 puder ser aplicado às taxas de juros compostos de 10% ao ano ou de 33,1% ao triênio, determinar a melhor aplicação.

*Resolução:*

Para determinar qual a melhor aplicação, vamos aplicar o capital disponível às duas taxas e por um mesmo prazo. Façamos a aplicação por 3 anos, que é o período da segunda taxa.

Aplicando à taxa de 10% a.a.:

$$C_3 = 1.000\,(1 + 0{,}10)^3$$

$$C_3 = 1.000\,(1{,}331)$$

$$C_3 = \text{Cr\$ } 1.331{,}00$$

Aplicando à taxa de 33,1% ao triênio, por um triênio:

$$C_1 = 1.000\,(1 + 0{,}331)^1$$

$$C_1 = 1.000\,(1{,}331)$$

$$C_1 = \text{Cr\$ } 1.331{,}00$$

É, portanto, indiferente aplicar-se a qualquer das taxas; ou seja, as taxas são equivalentes.

## 6. PERÍODOS NÃO-INTEIROS

Do mesmo modo que já foi visto em juros simples, poderemos encontrar em juros compostos o caso em que o prazo de aplicação não seja um número inteiro de períodos a que se refere a taxa considerada. Isto decorre do fato de que estamos considerando *capitalizações descontínuas*, ou seja, os juros supõem-se formados apenas no fim de cada período de capitalização. Devemos, portanto, considerar hipóteses adicionais para resolver o problema.

É prática comum adotarem-se duas convenções: a linear e a exponencial.

### 6.1. Convenção linear

É aquela em que os juros do período não-inteiros são calculados por interpolação linear.

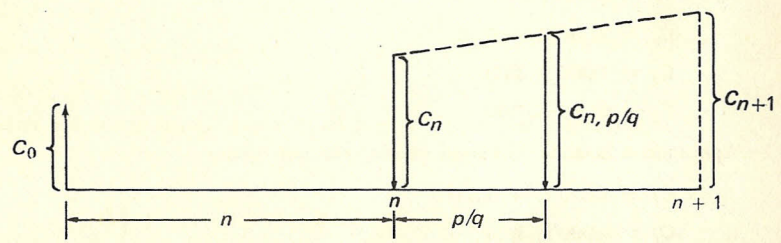
Procede-se por duas etapas:

*1ª etapa:* Calcula-se o montante correspondente à parte inteira de períodos, aplicando-se a fórmula de montante para juros compostos.

*2ª etapa:* Na fração de tempo não-inteira restante, admite-se uma *formação linear* de juros; ou seja, o montante obtido na *1ª etapa* passa a gerar *juros simples* na fração não-inteira restante. Nestas condições, os juros devidos na fração de período serão obtidos multiplicando-se o montante obtido na *1ª etapa* pela taxa de juros e pela fração proporcional de tempo correspondente à parte não-inteira.

Vamos exemplificar estas duas etapas de modo literal: seja um capital $C_0$ aplicado em $n$ períodos inteiros mais uma fração própria $p/q$ (onde: $p < q$) de um período, à taxa de juros compostos $i$.

A situação é a seguinte:




Observe-se que o período inteiro, posterior ao último período inteiro considerado, foi dividido em $q$ partes, das quais estamos considerando $p$ partes.



Calculemos o montante seguindo as duas etapas:

*1ª etapa:* Calculamos o montante pela fórmula de juros compostos:

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

*2ª etapa:* O juro formado na parte final será proporcional à taxa, à fração de tempo e ao montante do último período inteiro:

$$J_{p/q} = C_n \cdot i \cdot \frac{p}{q}$$

Portanto, o montante final é:

$$C_{n,\ p/q} = C_n + J_{p/q}$$

$$C_{n,\ p/q} = C_n + C_n \cdot i \cdot \frac{p}{q}$$

$$C_{n,\ p/q} = C_n \left[1 + i \cdot \frac{p}{q}\right]$$

Substituindo-se o valor do montante calculado na *1ª etapa*, tem-se:

$$\boxed{C_{n,\ p/q} = C_0(1 + i)^n \left[1 + i \cdot \frac{p}{q}\right]} \qquad (23)$$

*Exemplo:* Um capital de Cr$ 1.000,00 é emprestado à taxa de juros compostos de 10% a.a. por 5 anos e 6 meses. Tendo por base a capitalização anual, qual será o montante utilizando-se a convenção linear?

*Resolução:*

a) *por etapas:*

*1ª etapa:* Calculamos o montante para os períodos inteiros:

$$C_5 = C_0(1 + i)^5$$

$$C_5 = 1.000\,(1{,}10)^5$$

$$C_5 = 1.000\,(1{,}61051)$$

$$C_5 = 1.610{,}51$$

*2ª etapa:* Calculamos o juro gerado em 6 meses. Como a taxa de empréstimo está em termos anuais (12 meses), tem-se:

$p = 6$ meses

$q = 12$ meses

Portanto:

$$J_{6/12} = C_5 \cdot i \cdot \frac{6}{12}$$

$$J_{6/12} \cong 1.610{,}51 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{6}{12}$$

$$J_{6/12} \cong 80{,}53$$

Logo:

$$C_{5,\,6/12} = 1.610{,}51 + 80{,}53$$

$$C_{5,\,6/12} = \text{Cr\$ } 1.691{,}04$$

b) *usando-se a fórmula (23)*:

$$C_{5,\,6/12} = C_0(1 + i)^5\left[1 + i \cdot \frac{6}{12}\right]$$

$$C_{5,\,6/12} = 1.000\,(1{,}10)^5\left[1 + 0{,}1 \cdot \frac{1}{2}\right]$$

$$C_{5,\,6/12} = 1.000\,(1{,}61051)\,(1{,}05)$$

$$C_{5,\,6/12} = \text{Cr\$ } 1.691{,}04$$

## 6.2. Convenção exponencial

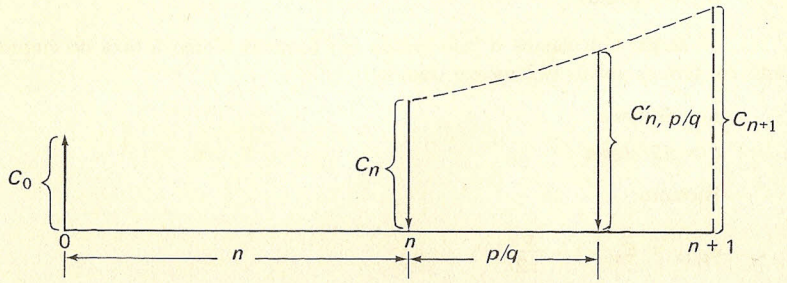
É aquela em que os juros do período não-inteiro são calculados utilizando-se a taxa equivalente.

De modo análogo, procede-se em duas etapas:

*1ª etapa:* Calcula-se o montante correspondente à parte inteira de períodos, aplicando-se a fórmula de montante para juros compostos.

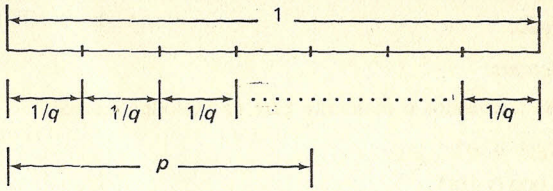
*2ª etapa:* Na fração de tempo não-inteiro restante, admite-se uma *formação exponencial* de juros. Ou seja, o montante obtido na *1ª etapa* passa a gerar *juros compostos* na fração não-inteira restante. Nestas condições, os juros devidos na fração de período serão obtidos multiplicando-se o montante obtido na *1ª etapa* pela taxa de juros compostos *equivalente* correspondente ao período não-inteiro.

Exemplificando de modo literal, seja um capital $C_0$, aplicado por $n$ períodos inteiros, mais uma fração própria $p/q$ (onde: $p < q$) de um período, à taxa de juros compostos $i$. Ou seja:






Observe-se que a parte final corresponde a um período inteiro que foi dividido em $q$ partes, das quais estamos considerando $p$ partes:




Calculemos o montante pelas duas etapas:

*1ª etapa:* calcula-se o montante em juros compostos:

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

*2ª etapa:* calcula-se a taxa equivalente. Como se tem uma fração $p/q$, calculamos em primeiro lugar a taxa equivalente ao intervalo de tempo $1/q$, aplicando a fórmula (22):

$$i_q = \sqrt[q]{1 + i} - 1$$

ou, de modo equivalente:

$$i_q + 1 = \sqrt[q]{1 + i}$$

$$i_q + 1 = (1 + i)^{1/q}$$

Em segundo lugar, capitalizamos esta taxa pelos $p$ períodos em que o montante $C_n$ deve ser aplicado. Ou seja, potenciamos os dois membros a $p$:

$$[(1 + i_q)]^p = [(1 + i)^{1/q}]^p$$

$$(1 + i_q)^p = (1 + i)^{p/q}$$

Podemos calcular agora:

$$C'_{n,\,p/q} = C_n(1 + i_q)^p$$

Ou seja:

$$C'_{n,\,p/q} = C_n(1 + i)^{p/q}$$

Substituindo o valor de $C_n$:

$$C'_{n,\,p/q} = C_0(1 + i)^n(1 + i)^{p/q}$$

Portanto:

$$\boxed{C'_{n,\,p/q} = C_0(1 + i)^{n\,+\,p/q}} \qquad (24)$$

*Exemplo:* Um capital de Cr$ 1.000,00 é emprestado à taxa de juros compostos de 10% a.a., pelo prazo de 5 anos e 6 meses. Tendo por base a capitalização anual, qual será o montante?

*Resolução:*

a) *por etapas:*

*1ª etapa:* calculamos o montante para os períodos inteiros:

$C_5 = C_0(1 + i)^5$

$C_5 = 1.000\,(1{,}10)^5$

$C_5 = 1.000\,(1{,}61051)$

$C_5 = 1.610{,}51$

*2ª etapa:* como a taxa dada está em base anual (12 meses), temos:

$$\left.\begin{array}{l} p = 6 \text{ meses} \\ q = 12 \text{ meses} \end{array}\right\} \quad \therefore \frac{p}{q} = \frac{1}{2}$$

Portanto:

$C'_{n,\,p/q} = C_n(1 + i)^{p/q}$

$C'_{5,\,1/2} = C_5\,(1{,}10)^{1/2}$

$C'_{5,\,1/2} = 1.610{,}51\,(1{,}048809)$

$C'_{5,\,1/2} = \text{Cr\$ } 1.689{,}12$

b) *usando a fórmula (24):*

$C'_{n,\,p/q} = C_0(1 + i)^{n\,+\,p/q}$

$C'_{5,\,1/2} = 1.000\,(1{,}10)^{5\,+\,1/2}$

$C'_{5,\,1/2} = 1.000\,(1{,}10)^{5{,}5}$

$C'_{5,\,1/2} \cong 1.000\,(1{,}68912)$

$C'_{5,\,1/2} = \text{Cr\$ } 1.689{,}12$

No Apêndice a este capítulo pode-se ver como se eleva a um expoente real, por logaritmos e por tentativa e erro.

### 6.3. Comparação entre a convenção linear e a exponencial

Os exemplos utilizados para exemplificar a *convenção linear* (item 6.1.) e a *convenção exponencial* (item 6.2.) tinham os mesmos dados. Compararemos os resultados obtidos:

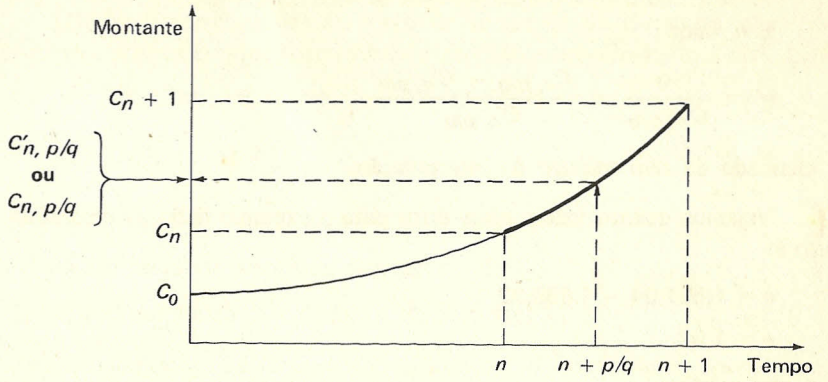
*Convenção linear:* 1.691,04

*Convenção exponencial:* 1.689,12

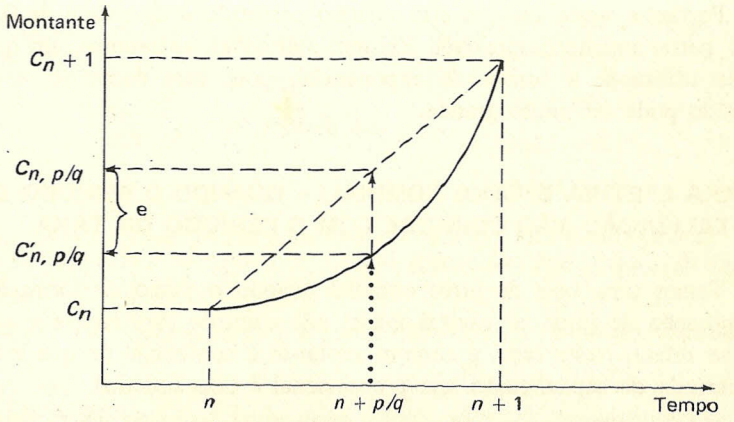


Existe, portanto, uma pequena diferença nos resultados. Vejamos sua causa e como medi-la.

Já vimos que o montante em juros compostos se comporta do seguinte modo em função do tempo:




Nosso problema é examinar como se comporta o montante quando se faz a interpolação entre $n$ e $n + 1$, considerando-se a fração $p/q$:




A interpolação pela convenção exponencial nos dá $C'_{n\,+\,p/q}$ sobre *a curva*, sendo portanto o *valor exato* procurado.

Já a convenção linear dá o valor $C_{n,\ p/q}$ sobre *a reta pontilhada*, sendo portanto um *valor aproximado*.

A diferença

$$e = C_{n,\ p/q} - C'_{n,\ p/q}$$

é chamada de *erro absoluto* da interpolação feita.

E o valor

$$e' = \frac{e}{C'_{n,\ p/q}} = \frac{C_{n,\ p/q} - C'_{n,\ p/q}}{C'_{n,\ p/q}}$$

é chamado de *erro relativo* da interpolação.

Vejamos quanto valem estes erros para o exemplo dado. O *erro absoluto* é:

$$e = 1.691{,}04 - 1.689{,}12$$

$$e = 1{,}92$$

e o *erro relativo:*

$$e' = \frac{1{,}92}{1.689{,}12} = 0{,}00114$$

ou:

$$e' = 0{,}114\%$$

Portanto, neste caso, o erro relativo cometido é da ordem de 0,1%, sendo perfeitamente desprezível. Existem aplicações, entretanto, em que é preciso utilizar-se a convenção exponencial, pois, caso contrário, o erro cometido pode ser muito grande.

## 7. TAXA EFETIVA E TAXA NOMINAL – QUANDO O PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO NÃO COINCIDE COM O PERÍODO DA TAXA

Temos uma taxa de juros nominal quando o prazo de formação e incorporação de juros ao capital inicial não coincide com aquele a que a taxa se refere. Neste caso, é comum adotar-se a convenção de que a taxa por período de capitalização seja proporcional à taxa nominal.

Vamos utilizar um problema para introduzir este caso:

*Exemplo:* Um banco faz empréstimos à taxa de 5% a.a., mas adotando a capitalização semestral dos juros. Qual seria o juro pago por um empréstimo de Cr$ 10.000,00, feito por 1 ano?



*Resolução:*

Adotando-se a convenção de que a taxa por período de capitalização seja a taxa proporcional simples à taxa nominal dada, tem-se:

$$i = 5\%\ \text{a.a.} \qquad i' = \frac{i}{k} = \frac{5}{2} = 2{,}5\%\ \text{a.s.}$$

Onde $k$ corresponde ao prazo de formação de juros, ou seja, é o número de vezes em que foi dividido o período correspondente à taxa dada.

Nestas condições, o montante no primeiro semestre é dado por:

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{i}{k}\right)^1$$

$$C_1 = 10.000\,(1 + 0{,}025)^1 = \text{Cr\$ } 10.250{,}00$$

E, no segundo semestre, tem-se:

$$C_2 = 10.250\,(1 + 0{,}025)^1 = \text{Cr\$ } 10.506{,}25$$

O montante que *seria devido* caso a capitalização fosse anual é dado por:

$$C' = C_0(1 + i)^1$$

$$C' = 10.000\,(1 + 0{,}05) = \text{Cr\$ } 10.500{,}00$$

Constatamos que existe uma pequena diferença para mais no montante, quando o prazo de capitalização não coincide com o prazo da taxa.

A *taxa efetiva* nesta operação, em que temos duas capitalizações, é dada por:

$$i_f = \frac{506{,}25}{10.000{,}00} = 0{,}050625\ \text{a.a.}$$

ou

$$i_f = 5{,}0625\%\ \text{a.a.}$$

E a *taxa efetiva* quando a capitalização é feita no período da taxa é:

$$i'_f = \frac{500{,}00}{10.000{,}00} = 0{,}05\ \text{a.a.}$$

ou

$$i'_f = 5\%\ \text{a.a.}$$

Observe-se que podemos obter o resultado diretamente, aplicando os Cr$ 10.000,00 em dois semestres:

$$C_2 = 10.000\,(1{,}025)^2 = 10.506{,}25$$

A taxa efetiva é dada por:

$1 + i_f = (1{,}025)^2 = 1{,}050625$

$\therefore\ i_f = 5{,}0625\%$ a.a.

Este exercício nos fornece um meio para calcular o montante e a taxa efetiva quando o período de capitalização não coincide com o período da taxa. Procedemos em duas etapas:

a) Calculamos a taxa proporcional simples correspondente a um período de capitalização.

b) Potenciamos esta taxa pelo número de períodos de capitalização existente no intervalo de tempo a que se refere a taxa nominal.

Sendo: $i$ = taxa nominal

$i_f$ = taxa efetiva

$k$ = número de capitalizações para 1 período da taxa nominal

$n$ = número de períodos de capitalização da taxa nominal

$C_0$ = principal

$C_{nk}$ = montante

temos:

$$C_{nk} = C_0 \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} \qquad (25)$$

E a *taxa efetiva* é dada por:

$$1 + i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k$$

$$i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1 \qquad (26)$$

*Exemplo:* Um capital de Cr$ 1.000,00 foi aplicado por 3 anos, à taxa de 10% a.a. com capitalização semestral. Calcular o montante e a taxa efetiva da operação.

*Resolução:*

$i = 10\%$ a.a.

$k = 2$

$n = 3$ anos



Portanto:

$$C_{nk} = C_0 \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn}$$

$$C_6 = 1.000 \left(1 + \frac{0{,}10}{2}\right)^{2 \cdot 3}$$

$$C_6 = 1.000\,(1 + 0{,}05)^6$$

$C_6 \cong$ Cr$ 1.340,10

A taxa efetiva é dada por:

$$i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$$

$$i_f = (1 + 0{,}05)^2 - 1$$

$i_f = 10{,}25\%$ a.a.

*Exemplo:* Sabendo-se que uma taxa nominal de 12% a.a. é capitalizada trimestralmente, calcular a taxa efetiva.

*Resolução:*

Como em 1 ano existem 4 trimestres, temos $k = 4$.

Então:

$$i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$$

$$i_f = \left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^4 - 1$$

$$i_f = (1{,}03)^4 - 1$$

$$i_f \cong 1{,}12551 - 1$$

$i_f \cong 0{,}12551$ a.a. ou $i_f \cong 12{,}551\%$ a.a.

**Nota:** Um caso muito comum nas aplicações é aquele em que a taxa nominal é dada em termos anuais e a capitalização é feita mensalmente.

*Exemplo:* Um banco emprestou a importância de Cr$ 1.000,00 por 1 ano. Sabendo-se que o banco cobra a taxa de 12% a.a., com capitalização mensal, pergunta-se qual a taxa efetiva anual e qual o montante a ser devolvido ao final de 1 ano.

*Resolução:*

Como a capitalização é mensal, $k = 12$.

Portanto:

$$i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$$

$$i_f = \left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{12} - 1$$

$$i_f = (1{,}01)^{12} - 1$$

$$i_f \cong 1{,}126825 - 1$$

$$i_f \cong 0{,}126825 \quad \text{ou} \quad i_f \cong 12{,}6825\% \text{ a.a.}$$

O montante a ser devolvido será:

$$C_{nk} = C_0 \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn}$$

Como $n = 1$, temos:

$$C_{12} = C_0 \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k$$

Temos:

$$1 + i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k$$

Portanto:

$$C_{12} = C_0(1 + i_f)$$

$$C_{12} = 1.000{,}00\,(1{,}126825)$$

$$C_{12} \cong \text{Cr\$ } 1.126{,}83.$$

## 8. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcular o montante de uma aplicação de Cr$ 10.000,00 sob as hipóteses abaixo:

| | Taxa | Prazo |
|---|---|---|
| a) | 20% a.a. | 5 anos |
| b) | 5% a.s. | 3 anos e meio |
| c) | 2,5% a.m. | 1 ano |

Para a resolução deste problema devemos aplicar a fórmula:

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$



*Resolução:*

a) $C_0 = 10.000$

$i = 20\%$ a.a.

$n = 5$

Temos, portanto:

$$C_5 = 10.000\,(1 + 0{,}2)^5$$

O fator $(1 + 0{,}2)^5$ encontra-se na tabela de $(1 + i)^n$, onde buscaremos $i = 20\%$ e $n = 5$ (ver Apêndice de Tabelas).

$$(1 + 0{,}2)^5 = 2{,}488320$$

$$\therefore C_5 = 10.000\,(2{,}488320) = \text{Cr\$ } 24.883{,}20$$

Se não existir tabela para a taxa ($i$) dada, pode-se calcular o valor do fator $(1 + i)^n$ de dois modos:

1 – o primeiro e mais óbvio é calcular-se o valor do fator, efetuando-se a potenciação:

$$(1 + 0{,}2)^5 = \underbrace{1{,}2 \times 1{,}2 \times 1{,}2 \times 1{,}2 \times 1{,}2}_{n = 5} = 2{,}48832$$

2 – o segundo é calcular-se o fator, via logaritmos:

$$(1 + 0{,}2)^5 = x, \quad \text{onde } x = \text{fator}$$

$$5 \log (1{,}2) = \log x$$

$$5\,(0{,}079181) = \log x$$

$$0{,}395906 = \log x$$

Extraindo o antilogaritmo:

$$x = 2{,}48832$$

b) $C_0 = 10.000$

$i = 5\%$ a.s.

$n = 3$ anos e meio

Para a aplicação direta da fórmula, é necessário que a taxa ($i$) e o período $n$ refiram-se ao mesmo intervalo de tempo. Neste caso devemos, portanto, calcular o prazo em semestres.

$$n = 3{,}5 \text{ anos} = 7 \text{ semestres}$$

$$C_7 = 10.000\,(1 + 0{,}05)^7$$

$C_7 = 10.000\,(1{,}407100)$

$C_7 = \text{Cr\$ } 14.071{,}00$

c) $C_0 = 10.000$

$i = 2{,}5\%$ a.m.

$n = 1$ ano

$C_{12} = 10.000\,(1 + 0{,}025)^{12}$

$C_{12} = 10.000\,(1{,}344889)$

$C_{12} = \text{Cr\$ } 13.448{,}89$

2. Qual é o juro auferido de um capital de Cr$ 1.500,00, aplicado segundo as hipóteses abaixo:

| | Taxa | – Prazo |
|---|---|---|
| a) | 10% a.a. | – 10 anos |
| b) | 8% a.t. | – 18 meses |
| c) | 1% à semana | – 2 meses |

*Resolução:*

Temos que

$$J_n = C_0[(1 + i)^n - 1]$$

portanto:

a) $C_0 = 1.500$

$i = 10\%$ a.a.

$n = 10$

$J_{10} = 1.500[(1 + 0{,}1)^{10} - 1]$

$J_{10} = 1.500[(2{,}593742) - 1]$

$J_{10} = 1.500\,(1{,}593742)$

$J_{10} = \text{Cr\$ } 2.390{,}61$

b) $C_0 = 1.500$

$i = 8\%$ a.t.

$n = 18$ meses

Transformando o prazo de aplicação, 18 meses, em termos de trimestres, temos:

$18m = 6t$



Então:

$J_6 = 1.500[(1 + 0{,}08)^6 - 1]$

$J_6 = 1.500[(1{,}586874) - 1]$

$J_6 = 1.500\,(0{,}586874)$

$J_6 = \text{Cr\$ } 880{,}31$

c) $C_0 = 1.500$

$i = 1\%$ à semana

$n = 2$ meses $= 8$ semanas

$J_8 = 1.500[(1 + 0{,}01)^8 - 1]$

$J_8 = 1.500[(1{,}082857) - 1]$

$J_8 = 1.500\,(0{,}082857)$

$J_8 = \text{Cr\$ } 124{,}29$

3. Se eu quiser comprar um carro no valor de Cr$ 60.000,00, quanto devo aplicar hoje para que daqui a 2 anos possua tal valor? Considerar as seguintes taxas de aplicação:

a) 2,5% a.m.

b) 10% a.s.

c) 20% a.a.

Devemos calcular o capital inicial:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)^n}$$

*Resolução:*

a) $C_n = 60.000$

$i = 2{,}5\%$ a.m.

$n = 2$ anos ou 24 meses

$$C_0 = \frac{60.000}{(1 + 0{,}025)^{24}}$$

$$C_0 = \frac{60.000}{1{,}808726}$$

$C_0 = \text{Cr\$ } 33.172{,}52$

b) $C_n = 60.000$ $\qquad n = 2$ anos ou 4 semestres

$i = 10\%$ a.s.

$$C_0 = \frac{60.000}{(1 + 0{,}10)^4}$$

$$C_0 = \frac{60.000}{1{,}464100}$$

$$C_0 = \text{Cr\$ } 40.980{,}81$$

c) $C_n = 60.000$

$i = 20\%$ a.a.

$n = 2$ anos

$$C_0 = \frac{60.000}{(1 + 0{,}20)^2}$$

$$C_0 = \frac{60.000}{1{,}44}$$

$$C_0 = \text{Cr\$ } 41.666{,}67$$

4. Quanto deve ser aplicado hoje para que se aufiram Cr$ 10.000,00 de juros ao fim de 5 anos, se a taxa de juros for de:

a) 4% a.t.

b) 20% a.q.

c) 30% a.a.

$$J_n = C_0[(1 + i)^n - 1]$$

e, portanto:

$$C_0 = \frac{J_n}{[(1 + i)^n - 1]}$$

*Resolução:*

a) $J_n = 10.000$

$i = 4\%$ a.t.

$n = 5$ anos ou 20 trimestres

$$C_0 = \frac{10.000}{[(1 + 0{,}04)^{20} - 1]}$$

$$C_0 = \frac{10.000}{[(2{,}191123) - 1]}$$

$$C_0 = \frac{10.000}{1{,}191123}$$

$$C_0 = \text{Cr\$ } 8.395{,}44$$



b) $J_n = 10.000$

$i = 20\%$ a.q.

$n = 5$ anos ou 15 quadrimestres

$$C_0 = \frac{10.000}{[(1 + 0{,}20)^{15} - 1]}$$

$$C_0 = \frac{10.000}{[(15{,}407022) - 1]}$$

$$C_0 = \frac{10.000}{14{,}407022}$$

$$C_0 = \text{Cr\$ } 694{,}11$$

c) $J_n = 10.000$

$i = 30\%$ a.a.

$n = 5$ anos

$$C_0 = \frac{10.000}{[(1 + 0{,}30)^5 - 1]}$$

$$C_0 = \frac{10.000}{[(3{,}712930) - 1]}$$

$$C_0 = \frac{10.000}{2{,}712930} = \text{Cr\$ } 3.686{,}05$$

5. Qual é a taxa de juros mensal recebida por um investidor que aplica Cr$ 1.000,00 e resgata os montantes, segundo as hipóteses abaixo:

a) Cr$ 1.076,89 – 3 meses

b) Cr$ 1.125,51 – 4 meses

c) Cr$ 1.340,10 – 6 meses

*Resolução:*

a) $C_n = 1.076{,}89$

$C_0 = 1.000{,}00$

$n = 3$ meses

Portanto:

$$1.076{,}89 = 1.000\,(1 + i)^3$$

$$\frac{1.076{,}89}{1.000} = (1 + i)^3$$

$$1{,}07689 = (1 + i)^3$$

Devemos encontrar a taxa de juros ($i$), tal que esta igualdade seja verdadeira. Referindo-se às tabelas de $(1 + i)^n$, procuramos para $n = 3$ qual a taxa "$i$" que conduz àquele fator (ver Apêndice de Tabelas).

Encontramos que para $i = 2{,}5\%$ e $n = 3$, $(1 + i)^n \cong 1{,}07689$, portanto a taxa procurada é de 2,5% a.m. A taxa é mensal porque "$n$" está expresso em meses.

Sem o auxílio de tabelas podemos encontrar o valor da taxa pela radiciação:

$$1{,}07689 = (1 + i)^3$$

$$\therefore\ (1{,}07689)^{1/3} = (1 + i),$$

calculando-se a raiz cúbica neste caso.

Um dos métodos mais diretos de cálculo da raiz $n$-ésima de um número, é o método via logaritmos:

$$\frac{1}{3} \log 1{,}07689 = \log (1 + i)$$

$$\frac{1}{3} (0{,}032171) = \log (1 + i)$$

$$0{,}010724 = \log (1 + i)$$

Extraindo o antilogaritmo:

$$1 + i = 1{,}025$$

$$\therefore\ i = 0{,}025 \quad \text{ou} \quad 2{,}5\% \text{ a.m.}$$

Caso não se disponha de meios para calcular logaritmos, pode-se aplicar a *fórmula de recorrência* (v. Apêndice a este capítulo):

$$(1 + i_{k+1}) = \frac{n-1}{n}\left[(1 + i'_k) + \frac{(1 + i)}{(n-1)\,(1 + i'_k)^{(n-1)}}\right]$$

onde, por iterações, se encontra a raiz $n$-ésima de $(1 + i)$. No presente problema tem-se:

$$\sqrt[3]{1{,}07689} = 1 + i$$

Como valor inicial, pode-se utilizar $1 + i'_k$, sendo $i'_k$ a taxa de juros proporcional (juros simples).

$$i'_k = \frac{0{,}07689}{3} = 0{,}02563$$



$$(1 + i_{k+1}) = \frac{2}{3}\left[1{,}02563 + \frac{1{,}07689}{2\,(1{,}02563)^2}\right]$$

$$(1 + i_{k+1}) = 1{,}025$$

Testando:

$$(1{,}025)^3 \cong 1{,}07689$$

Neste caso, na primeira iteração chegou-se à raiz exata.

$$1 + i = 1{,}025 \quad \therefore \quad i = 0{,}025 \quad \text{ou} \quad 2{,}5\% \text{ a.m.}$$

b) $C_n = 1.125{,}51$

$C_0 = 1.000{,}00$

$n = 4$ meses

$$1.125{,}51 = 1.000\,(1 + i)^4$$

$$\frac{1.125{,}51}{1.000} = (1 + i)^4$$

$$1{,}12551 = (1 + i)^4$$

(Ver Apêndice de Tabelas.)

Para $i = 3\%$ e $n = 4$ (meses), $(1 + i)^n \cong 1{,}12551$.

Portanto, a taxa é de 3% a.m.

Pela radiciação:

$$(1{,}12551)^{1/4} = (1 + i)$$

Em logaritmos:

$$\frac{1}{4} \log 1{,}12551 = \log (1 + i)$$

$$\frac{1}{4} (0{,}051349) = \log (1 + i)$$

$$0{,}012837 = \log (1 + i)$$

Extraindo o antilogaritmo:

$$(1 + i) = 1{,}03$$

$$\therefore\ i = 0{,}03 \quad \text{ou} \quad 3\% \text{ a.m.}$$

Cálculo da raiz por iterações:

$$i'_k = \frac{0{,}12551}{4} = 0{,}031378$$

$$1 + i'_k = 1{,}031378$$

$$(1 + i_{k+1}) = \frac{3}{4}\left[1{,}031378 + \frac{1{,}12551}{3(1{,}031378)^3}\right]$$

$$(1 + i_{k+1}) = 1{,}03000$$

Testando:

$$1{,}03^4 \cong 1{,}12551$$

$$1 + i = 1{,}03$$

$$\therefore\ i = 0{,}03 \quad \text{ou} \quad 3\%\ \text{a.m.}$$

c) $C_n = 1.340{,}10$

$C_0 = 1.000{,}00$

$n = 6$ meses

$$1.340{,}10 = 1.000\,(1 + i)^6$$

$$\frac{1.340{,}10}{1.000} = (1 + i)^6$$

$$1{,}34010 = (1 + i)^6$$

(Ver Apêndice de Tabelas.)

Para $i = 5\%$ e $n = 6$ (meses), $(1 + i)^n \cong 1{,}34010$. Portanto, a taxa é de 5% a.m.

Utilizando-se de logaritmos, teremos que

$$(1{,}3401)^{1/6} = (1 + i)$$

$$\frac{1}{6}\log\,(1{,}34010) = \log\,(1 + i)$$

$$\frac{1}{6}(0{,}127137) = \log\,(1 + i)$$

$$0{,}021190 = \log\,(1 + i)$$

Extraindo o antilogaritmo:

$$(1 + i) = 1{,}05$$

$$\therefore\ i = 0{,}05 \quad \text{ou} \quad 5\%\ \text{a.m.}$$

Por iterações:

$$i'_k = \frac{0{,}34010}{6} = 0{,}05668$$

$$(1 + i'_k) = 1{,}05668$$



$$(1 + i_{k+1}) = \frac{5}{6}\left[1{,}05668 + \frac{1{,}34010}{5\,(1{,}05668)^5}\right]$$

$$(1 + i_{k+1}) = 1{,}05011$$

Testando: $(1{,}05011)^6 = 1{,}34094$

Processando-se a segunda iteração, temos:

$$(1 + i_{k+2}) = \frac{5}{6}\left[1{,}05011 + \frac{1{,}34010}{5\,(1{,}05011)^5}\right]$$

$$(1 + i_{k+2}) = 1{,}05000$$

Testando: $(1{,}05)^6 = 1{,}34010$

$$1 + i = 1{,}05 \quad \therefore\ i = 0{,}05 \quad \text{ou} \quad 5\%\ \text{a.m.}$$

6. Uma pessoa aplicou Cr$ 15.000,00 e após um ano recebeu Cr$ 18.782,87 de juros. Qual foi a taxa de juros mensal paga pela financeira onde o dinheiro foi aplicado?

*Resolução:*

$C_0 = 15.000{,}00$

$J_n = 18.782{,}87$

$n = 1$ ano ou 12 meses

$$J_n = C_0[(1 + i)^n - 1]$$

$$18.782{,}87 = 15.000[(1 + i)^{12} - 1]$$

$$\frac{18.782{,}87}{15.000} = (1 + i)^{12} - 1$$

$$1{,}252191 = (1 + i)^{12} - 1$$

$$2{,}252191 = (1 + i)^{12}$$

Procurando no Apêndice de Tabelas, encontramos para $i = 7\%$ e $n = 12$, $(1 + i)^n \cong 2{,}252191$. Portanto, a taxa é de 7% a.m. Calculando-se por logaritmos:

$$(2{,}252191)^{1/12} = (1 + i)$$

$$\frac{1}{12}\log\,(2{,}252191) = \log\,(1 + i)$$

$$\frac{1}{12}\,(0{,}352605) = \log\,(1 + i)$$

$$0{,}029384 = \log\,(1 + i)$$

$$1{,}07 = (1 + i)$$

$$\therefore\ i = 0{,}07 \quad \text{ou} \quad 7\%\ \text{a.m.}$$

Por iterações:

$$i'_k = \frac{1{,}252191}{12} \cong 0{,}1043$$

$$(1 + i'_k) = 1{,}1043$$

$$(1 + i_{k+1}) = \frac{11}{12}\left[1{,}1043 + \frac{2{,}252191}{11\,(1{,}1043)^{11}}\right]$$

$$(1 + i_{k+1}) \cong 1{,}0752$$

Testando: $(1{,}0752)^{12} \cong 2{,}387102 > 2{,}252191$

Processando-se à segunda iteração:

$$(1 + i_{k+2}) = \frac{11}{12}\left[1{,}0752 + \frac{2{,}252191}{11\,(1{,}0752)^{11}}\right]$$

$$(1 + i_{k+2}) = 1{,}070136$$

Testando: $(1{,}070136)^{12} \cong 2{,}255629 > 2{,}252191$

Processando-se à terceira iteração:

$$(1 + i_{k+3}) = \frac{11}{12}\left[1{,}070136 + \frac{2{,}252191}{11\,(1{,}070136)^{11}}\right]$$

$$(1 + i_{k+3}) = 1{,}0700000$$

Testando: $(1{,}07)^{12} \cong 2{,}252191$

Portanto $(1 + i) = 1{,}07 \ \therefore\ i = 0{,}07$ ou $7\%$ a.m.

7. Qual é a taxa de juros mensal paga por uma instituição onde o aplicador recebeu, após 2 anos, o montante de Cr$ 45.666,57, sendo Cr$ 25.666,57 referente a juros?

*Resolução:*

$C_n = 45.666{,}57$

$J_n = 25.666{,}57$

$n = 2$ anos ou 24 meses

$$C_n = C_0 + J_n$$

$$45.666{,}57 = C_0 + 25.666{,}57$$

$$\therefore\ C_0 = 20.000{,}00$$



$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

$$45.666{,}57 = 20.000\,(1 + i)^{24}$$

$$\frac{45.666{,}57}{20.000} = (1 + i)^{24}$$

$$2{,}283329 = (1 + i)^{24}$$

Ver Apêndice de Tabelas, buscando *"i"* para $n = 24$. Em $i = 3{,}5\%$ e $n = 24$ (meses), $(1 + i)^n \cong 2{,}283329$. A taxa é, portanto, de 3,5% a.m.

Calculando a raiz por logaritmos, temos:

$$\frac{1}{24}\log 2{,}283329 = \log(1 + i)$$

$$\frac{1}{24}(0{,}358568) = \log(1 + i)$$

$$0{,}014940 = \log(1 + i)$$

Extraindo o antilogaritmo:

$$(1 + i) = 1{,}035$$

$$\therefore\ i = 0{,}035 \quad \text{ou} \quad 3{,}5\%\ \text{a.m.}$$

8. Um investidor aplicou Cr$ 25.000,00 em uma instituição que paga 3% a.m. Após certo período de tempo, ele recebeu Cr$ 35.644,02, estando neste valor incluídos os juros creditados e o capital investido. Quanto tempo ficou o dinheiro aplicado?

*Resolução:*

$C_0 = 25.000{,}00$

$C_n = 35.644{,}02$

$i = 3\%$ a.m.

$$35.644{,}02 = 25.000\,(1{,}03)^n$$

$$\frac{35.644{,}02}{25.000} = (1{,}03)^n$$

$$1{,}425761 = (1{,}03)^n$$

O problema é então encontrar o número de períodos ($n$) que torne a igualdade acima verdadeira.

Referindo-se à tabela de 3%, procuramos o *"n"* que conduz àquele fator.

Encontramos, para $i = 3\%$ (a.m.) e $n = 12$, $(1 + i)^n = 1{,}425761$.

Portanto, o capital ficou aplicado por 12 meses. O período de tempo é expresso em meses, porque a taxa de juros considerada é mensal e sabemos que "$i$" e "$n$" devem referir-se à mesma unidade de tempo.

Outro método de resolução é por logaritmos:

$$1{,}425761 = (1{,}03)^n$$

$$\log 1{,}425761 = n \cdot \log 1{,}03$$

$$0{,}154047 = n\,(0{,}012837)$$

$$n = \frac{0{,}154047}{0{,}012837}$$

$$\therefore\ n = 12 \text{ meses}$$

9. Um apartamento é vendido, a vista, por Cr$ 220.000,00. Caso o comprador opte por pagar em uma única parcela após certo período de tempo, o vendedor exige Cr$ 61.618,59 como juros, pois quer ganhar 2,5% a.m. Qual é o prazo de financiamento na hipótese acima?

*Resolução:*

$C_0 = 220.000{,}00$

$i = 2{,}5\%$ a.m.

$J_n = 61.618{,}59$

Considerando a fórmula

$$J_n = C_0\,[(1 + i)^n - 1]$$

temos:

$$61.618{,}59 = 220.000\,[(1{,}025)^n - 1]$$

$$\frac{61.618{,}59}{220.000} = (1{,}025)^n - 1$$

$$0{,}280085 = (1{,}025)^n - 1$$

$$1 + 0{,}280085 = (1{,}025)^n$$

$$1{,}280085 = (1{,}025)^n$$

Procurando na tabela de 2,5%, encontra-se para $i = 2{,}5\%$ e $n = 10$ o fator $(1 + i)^n = 1{,}280085$. Como a taxa está expressa, no problema, em termos mensais, o período também é mensal, portanto: 10 meses é a resposta.

Resolvendo por logaritmos:

$$\log 1{,}280085 = n \cdot \log 1{,}025$$



$$0{,}107239 = n\,(0{,}010724)$$

$$n = \frac{0{,}107239}{0{,}010724} \quad \therefore \quad n = 10 \text{ meses}$$

10. Calcular a taxa equivalente anual dadas as seguintes taxas por período:

a) 1% a.m.

b) 2% a.t.

c) 5% a.q.

d) 10% a.s.

Neste caso devemos empregar a fórmula

$$1 + i = (1 + i_q)^q$$

onde: $i$ = taxa equivalente que se quer calcular

$i_q$ = taxa por período

$q$ = número de períodos a que se refere $i_q$, contidos no período a que se refere $i$

*Resolução:*

a) $i$ = taxa anual

$i_q = 1\%$ a.m.

$q = 12$ meses

$$1 + i = (1 + 0{,}01)^{12}$$

$$1 + i = (1{,}01)^{12}$$

Efetuando a potenciação ou buscando na tabela de 1%, com $n = 12$, encontramos que $(1{,}01)^{12} = 1{,}126825$.

Portanto:

$$1 + i = 1{,}126825$$

$$\therefore\ i = 0{,}126825 \quad \text{ou} \quad \cong 12{,}68\% \text{ a.a.}$$

b) $i$ = taxa anual

$i_q = 2\%$ a.t.

$q = 4$ trimestres

$$1 + i = (1{,}02)^4$$

$$1 + i = 1{,}082432$$

$$\therefore\ i = 0{,}082432 \quad \text{ou} \quad i \cong 8{,}24\% \text{ a.a.}$$

c) $i$ = taxa anual

$i_q$ = 5% a.q. (ao quadrimestre)

$q$ = 3 quadrimestres

$1 + i = (1{,}05)^3$

$1 + i = 1{,}157625$

$\therefore\ i = 0{,}157625$ ou $i \cong 15{,}76\%$ a.a.

d) $i$ = taxa anual

$i_q$ = 10% a.s.

$q$ = 2 semestres

$1 + i = (1{,}10)^2$

$1 + i = 1{,}21$

$\therefore\ i = 0{,}21$ ou $i = 21\%$ a.a.

11. Calcular as taxas equivalentes a 20% a.a., conforme solicitado abaixo:

a) taxa semestral

b) taxa quadrimestral

c) taxa trimestral

d) taxa mensal

Utilizando-se da fórmula

$$i_q = \sqrt[q]{1 + i} - 1$$

onde: $i$ = taxa por período

$i_q$ = taxa equivalente que se deseja calcular

$q$ = número de períodos a que se refere $i_q$, contidos no período a que se refere $i$

a) $i$ = 20% a.a.

$i_q$ = taxa equivalente semestral

$q$ = 2 (semestres)

$$i_q = \sqrt[2]{1{,}20} - 1$$

O cálculo da raiz, conforme foi visto em outros exemplos, pode ser feito por logaritmos ou por iterações. Neste caso, como temos esta taxa (20%) tabelada, o resultado da raiz pode ser encontrado no Apêndice de Tabelas.



Para $i = 20\%$ e $q = 2$, temos que $i_q = 0{,}095445$ ou $i \cong 9{,}54\%$ a.s.

Cálculo por logaritmos:

$$x = \sqrt{1{,}20}$$

$$\log x = \frac{1}{2} \log 1{,}2$$

$$\log x = \frac{1}{2}(0{,}079181)$$

$$\log x = 0{,}039591$$

$$x = \text{antilog } 0{,}039591$$

$$x = 1{,}095445$$

$\therefore\ i_q = 0{,}095445$ ou $i_q \cong 9{,}54\%$ a.s.

Cálculo por iterações:

$$i'_k = \frac{0{,}20}{2} = 0{,}10$$

$$(1 + i'_k) = 1{,}1$$

$$(1 + i_{k+1}) = \frac{1}{2}\left[1{,}1 + \frac{1{,}2}{1{,}1}\right]$$

$$(1 + i_{k+1}) = 1{,}095454$$

Testando: $(1{,}095454)^2 \cong 1{,}20$

Portanto, $i_q = 0{,}095454$ ou $i_q \cong 9{,}54\%$ a.s.

b) $i$ = 20% a.a.

$i_q$ = taxa equivalente quadrimestral

$q$ = 3 (quadrimestres)

$$i_q = \sqrt[3]{1{,}20} - 1$$

Procurando na tabela, temos que para $i = 20\%$ e $q = 3$, $i_q = 0{,}062659$ ou $i_q \cong 6{,}27\%$ a.q.

Cálculo por logaritmos:

$$x = \sqrt[3]{1{,}20}$$

$$\log x = \frac{1}{3} \log 1{,}20$$

$$\log x = 0{,}026394$$

$$x = 1{,}062659$$

$\therefore\ i_q = 0{,}062659$ ou $i_q \cong 6{,}27\%$ a.s.

**Nota:** Sugere-se que o leitor efetue o cálculo da raiz por iterações.

c) $i = 20\%$ a.a.

$i_q$ = taxa equivalente trimestral

$q = 4$ (trimestres)

$$i_q = \sqrt[4]{1{,}20} - 1$$

Pela tabela temos que $i_q = 0{,}046635$ ou $i_q \cong 4{,}66\%$ a.t.

Cálculo por logaritmos:

$$x = \sqrt[4]{1{,}20}$$

$$\log x = \frac{1}{4} \log 1{,}20$$

$$\log x = 0{,}019795$$

$$x = 1{,}046635$$

$\therefore\ i_q = 0{,}046635$ ou $i_q \cong 4{,}66\%$ a.t.

d) $i = 20\%$ a.a.

$i_q$ = taxa equivalente mensal

$q = 12$ (meses)

$$i_q = \sqrt[12]{1{,}20} - 1$$

Pela tabela encontramos $i_q = 0{,}015309$ ou $i_q \cong 1{,}53\%$ a.m.

Cálculo por logaritmos:

$$x = \sqrt[12]{1{,}20} \Longrightarrow \log x = \frac{1}{12} \log 1{,}20$$

$$\therefore \log x = 0{,}006598 \Longrightarrow x = 1{,}015309$$

$\therefore\ i_q = 0{,}015309$ ou $i_q \cong 1{,}53\%$ a.m.

12. Um corretor de títulos propõe a seu cliente uma aplicação cuja rentabilidade é de 40% a.a. Se o investidor souber de outra alternativa onde possa ganhar 9% a.t., qual será sua escolha?

*Resolução:*

Pode-se comparar as duas alternativas, verificando se suas taxas são equivalentes:

a) Calculando a taxa anual equivalente a 9% a.t., temos:



$$(1 + i) = (1{,}09)^4$$

$$(1 + i) = 1{,}4115816$$

$\therefore\ i \cong 0{,}4116$ ou $i \cong 41{,}16\%$ a.a.

Portanto, aplicar a 9% a.t., que conduz a uma taxa anual de 41,16%, é melhor que a primeira alternativa (40% a.a.).

b) Outro enfoque, que leva à mesma conclusão, é o de calcular a taxa trimestral equivalente a 40% a.a., comparando-se, então, esta com a da segunda alternativa (9% a.t.).

$$(1 + i_q) = (1{,}40)^{1/4}$$

$$(1 + i_q) = 1{,}087757$$

$\therefore\ i_q \cong 0{,}0878$ ou $i_q \cong 8{,}78\%$ a.t.

Como 8,78% a.t. < 9,00% a.t., temos que a segunda alternativa é a melhor.

13. O preço de uma mercadoria é de Cr$ 2.000,00, sendo financiada até 3 meses, ou seja, o comprador tem 3 meses como prazo-limite para efetuar o pagamento. Caso opte por pagar a vista, a loja oferece um desconto de 10%. Sabendo-se que a taxa de mercado é de 40% a.a., vale a pena comprar a prazo?

*Resolução:*

Devemos inicialmente descobrir que taxa está sendo cobrada na operação; a seguir podemos compará-la com a taxa de mercado.

$C_0 = 2.000\,(1 - 0{,}10) = 1.800$

$C_n = 2.000$

$n = 3$ meses ou 1 trimestre

$2.000 = 1.800\,(1 + i)^1$ (a taxa calculada será trimestral)

$$(1 + i) = \frac{2.000}{1.800}$$

$(1 + i) \cong 1{,}1111$

$i \cong 0{,}1111$ ou 11,11% a.t.

A taxa equivalente anual será de:

$(1{,}1111)^4 \cong 1{,}5241$ $\therefore$ 52,41% a.a.

A loja está, portanto, cobrando 52,41% a.a., taxa esta que é superior à

de mercado (40% a.a.). Donde se conclui que a melhor alternativa é comprar a vista.

**Sugestão:** Comparar através das taxas trimestrais.

14. Ao resgatar um título, após 6 meses da aplicação, o investidor recebeu Cr$ 25.083,86. Tendo sido informado de que este montante incluía Cr$ 3.083,86 referentes aos juros creditados, deseja saber que taxa anual de juros ganhou?

*Resolução:*

$C_n = 25.083,86$

$J_n = 3.083,86$

$n = 6$ meses ou 1 semestre

$C_0 = C_n - J_n$

$C_0 = 25.083,86 - 3.083,86$

$C_0 = 22.000,00$

$25.083,86 = 22.000\,(1 + i)^1$ (a taxa calculada será semestral)

$$(1 + i) = \frac{25.083,86}{22.000}$$

$(1 + i) \cong 1.140175 \quad \therefore \quad i \cong 0,140175$ a.s.

A taxa anual será de:

$(1,140175)^2 \cong 1,30 \quad \therefore \quad 30,00\%$ a.a.

15. Que taxa de juros mensal fará um capital dobrar em 1 ano?

*Resolução:*

Supondo que tenhamos um capital inicial $C_0 = 1$, após 1 ano $C_n = 2$, então:

$C_0 = 1$

$C_n = 2$

$n = 12$ meses

$2 = 1\,(1 + i)^{12}$

$2 = (1 + i)^{12}$

$2^{1/12} = (1 + i)$ ou $\sqrt[12]{2} = (1 + i)$

$$\frac{1}{12} \log 2 = \log (1 + i)$$



$0,025086 = \log (1 + i)$

$1 + i = 1,059463$

$\therefore \quad i = 0,059463$ ou $i \cong 5,95\%$ a.m.

16. Considerando a convenção linear, calcular o montante de um capital de Cr$ 10.000,00, aplicado conforme as hipóteses abaixo:

Prazos – Taxas

a) 95 dias – 3% a.m.

b) 450 dias – 15% a.s.

c) 62 meses – 20% a.a.

Pela fórmula da convenção linear, tem-se:

$$C_{n,\,p/q} = C_0\,(1 + i)^n \cdot \left(1 + i\frac{p}{q}\right)$$

*Resolução:*

a) $C_0 = 10.000$

$i = 3\%$ a.m.

$n = 3$ meses

$p = 5$ dias

$q = 30$ dias

Em 95 dias temos 3 meses completos ($n = 3$) e restam 5 dias ($p = 5$).

$$C_{n,\,p/q} = 10.000\,(1,03)^3 \left(1 + 0,03\frac{5}{30}\right)$$

$C_{n,\,p/q} = 10.000\,(1,092727)\,(1,005)$

$C_{n,\,p/q} \cong$ Cr$ 10.981,91

b) $C_0 = 10.000$

$i = 15\%$ a.s.

$n = 2$ semestres

$p = 90$ dias ou 3 meses

$q = 180$ dias ou 6 meses

Em 450 dias temos 2 semestres completos ($n = 2$) e restam 90 dias ($p = 90$), sendo neste caso $q = 180$ (dias). Se considerarmos a fração restante em meses, $p = 3$ e $q = 6$, como pode ser visto: $\frac{90}{180} = \frac{3}{6}$, sendo portanto indiferente o cálculo em dias ou meses.

$$C_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}15)^2 \cdot \left(1 + 0{,}15\frac{3}{6}\right)$$

$$C_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}3225)\,(1{,}075)$$

$$C_{n,\,p/q} \cong \text{Cr\$ } 14.216{,}88$$

c) $C_0 = 10.000$

$i = 20\%$ a.a.

$n = 5$ anos

$p = 2$ meses

$q = 12$ meses

$$C_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}20)^5 \cdot \left(1 + 0{,}20\frac{2}{12}\right)$$

$$C_{n,\,p/q} = 10.000\,(2{,}48832)\,(1{,}03333)$$

$$C_{n,\,p/q} \cong \text{Cr\$ } 25.712{,}64$$

17. Resolver o problema anterior, adotando a convenção exponencial (comparar com os resultados obtidos pela convenção linear).

Nesta situação, os juros referentes à fração própria serão calculados mediante aplicação da taxa equivalente. A fórmula empregada será:

$$C'_{n,\,p/q} = C_0\,(1 + i)^{n\,+\,p/q}$$

*Resolução:*

a) $C_0 = 10.000$

$i = 3\%$ a.m.

$n = 3$ meses

$p = 5$ dias

$q = 30$ dias

$$C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}03)^{3\,+\,5/30}$$

$$C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}03)^{3\,+\,1/6}$$

A solução pode ser obtida por dois meios:

1º) Calculando $(1{,}03)^{3{,}166667}$, onde o expoente é igual a soma de $3 + \frac{1}{6}$.

2º) Calculando $(1{,}03)^3 \cdot (1{,}03)^{1/6}$, que naturalmente conduz ao mesmo resultado, mas que apresenta a facilidade proporcionada pela existência de raízes tabeladas.



Temos:

1º) $C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}03)^{3{,}166667}$

$$C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}098124)$$

$$C'_{n,\,p/q} \cong \text{Cr\$ } 10.981{,}24$$

ou:

2º) $C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}03)^3\,(1{,}03)^{1/6}$

$$C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}092727)\,(1{,}004939)$$

$$C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}098124)$$

$$C'_{n,\,p/q} \cong \text{Cr\$ } 10.981{,}24$$

b) $C_0 = 10.000$

$i = 15\%$ a.s.

$n = 2$ semestres

$p = 3$ meses

$q = 6$ meses

$$C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}15)^2\,(1{,}15)^{3/6}$$

$$C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}15)^2\,(1{,}15)^{1/2}$$

$$C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}3225)\,(1{,}072381)$$

$$C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}418224)$$

$$C'_{n,\,p/q} \cong \text{Cr\$ } 14.182{,}24$$

c) $C_0 = 10.000$

$i = 20\%$ a.a.

$n = 5$ anos

$p = 2$ meses

$q = 12$ meses

$$C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}20)^5\,(1{,}20)^{2/12}$$

$$C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(1{,}20)^5\,(1{,}20)^{1/6}$$

$$C'_{n,\,p/q} = 10.000\,(2{,}488320)\,(1{,}030853)$$

$$C'_{n,\,p/q} \cong 10.000\,(2{,}565092)$$

$$C'_{n,\,p/q} \cong \text{Cr\$ } 25.650{,}92$$

18. João aplicou certa quantia e após 18 meses verificou que o montante importava em Cr$ 5.590,17. Qual foi o valor investido, uma vez que a taxa de aplicação foi de 25% a.a.? Considerar as convenções linear e exponencial.

*Resolução:*

$C_{n,\ p/q} = 5.590,17$

$i = 25\%$ a.a.

$n = 1$ ano

$p = 6$ meses

$q = 12$ meses

1º) Convenção linear:

$$5.590,17 = C_0(1,25)^1\left(1 + 0,25\frac{6}{12}\right)$$

$$5.590,17 = C_0(1,40625)$$

$$C_0 = \frac{5.590,17}{1,40625}$$

$C_0 = \text{Cr\$ } 3.975,23$

2º) Convenção exponencial:

$$5.590,17 = C_0\,(1,25)^1\,(1,25)^{6/12}$$

$$5.590,17 = C_0\,(1,25)\,(1,25)^{1/2}$$

$$5.590,17 = C_0\,(1,25)\,(1,118034)$$

$$C_0 = \frac{5.590,17}{1,397543}$$

$C_0 = \text{Cr\$ } 4.000,00$

19. Uma pessoa investiu Cr$ 15.000,00 à taxa de 30% a.a. e após certo tempo recebeu o montante de Cr$ 30.195,36. Quanto tempo o capital ficou aplicado? Considerar as convenções linear e exponencial, caso seja necessário.

*Resolução:*

Como não sabemos se o número de períodos é inteiro ou não, vamos calcular na hipótese de que fosse.

$C_n = 30.195,36$ $\qquad$ $i = 30\%$ a.a.

$C_0 = 15.000,00$



Então, $C_n = C_0(1 + i)^n$

$$30.195,36 = 15.000(1,30)^n$$

$$\frac{30.195,36}{15.000} = (1,30)^n$$

$$2,013024 = (1,30)^n$$

Examinando os valores tabelados para $i = 30\%$, verificamos que o fator $(1 + i)^n$ assume os seguintes valores:

para $n = 2 \Longrightarrow (1 + i)^n = 1,690$

para $n = 3 \Longrightarrow (1 + i)^n = 2,197$

Como temos $(1,30)^n = 2,013024$, conclui-se que o número de períodos é fracionário, ou seja, encontra-se entre 2 anos e 3 anos.

1º) Pela convenção linear, temos:

$$2,013024 = (1,30)^2\left(1 + 0,30\frac{p}{q}\right)$$

Se formos expressar a fração em termos de meses, então $q = 12$, pois 1 ano = 12 meses.

$$2,013024 = (1,30)^2\left(1 + 0,30\frac{p}{12}\right)$$

$$2,013024 = 1,69(1 + 0,025p)$$

$$\frac{2,013024}{1,69} = 1 + 0,025p$$

$$1,191138 - 1 = 0,025p$$

$$0,191138 = 0,025p$$

$$\frac{0,191138}{0,025} = p$$

$\therefore\ p = 7,645536$

A fração é então igual a 7 meses e 0,645536 de mês.

Transformando esta fração de mês, vem:

$30 \times 0,645536 = 19$ dias

O tempo de aplicação foi de 2 anos, 7 meses e 19 dias.

2º) Pela convenção exponencial, temos:

$$2,013024 = (1,30)^2\,(1,30)^{p/12}$$

$$\frac{2,013024}{1,69} = (1,30)^{p/12}$$

$$1,191138 = \left[1,30^{1/12}\right]^{p}$$

$$1,191138 = (1,022104)^{p}$$

$$\log 1,191138 = p \cdot \log 1,022104$$

$$0,075962 = p \cdot 0,009495$$

$$p = \frac{0,075962}{0,009495}$$

$$\therefore\ p \cong 8 \text{ meses}$$

O tempo de aplicação foi de 2 anos e 8 meses.

20. Qual é a taxa efetiva anual cobrada em cada uma das hipóteses abaixo:

Taxa nominal – Capitalização

a) 18% a.a. – mensal

b) 20% a.a. – trimestral

c) 25% a.a. – semestral

Para a determinação da taxa efetiva vamos utilizar:

$$i_f = (1 + i')^n - 1$$

onde:

$i_f$ = taxa efetiva a ser calculada

$n$ = número de períodos de capitalização contidos no período a que se refere a taxa nominal

$i'$ = taxa proporcional $\left(i' = \frac{i}{n}\right)$

*Resolução:*

a) $i$ = 18% a.a.

$n$ = 12 meses

$$i' = \frac{i}{n} = \frac{0,18}{12} = 0,015 \text{ a.m.}$$

$i_f$ = ?

Portanto:

$$i_f = (1 + 0,015)^{12} - 1$$



$$i_f = 1,195618 - 1$$

$$i_f = 0,195618 \quad \text{ou} \quad i_f \cong 19,56\% \text{ a.a.}$$

b) $i$ = 20% a.a.

$n$ = 4 (trimestres)

$$i' = \frac{i}{n} = \frac{0,20}{4} = 0,05 \text{ a.t.}$$

$i_f$ = ?

$$i_f = (1 + 0,05)^4 - 1$$

$$i_f = 1,215506 - 1$$

$$i_f = 0,215506 \quad \text{ou} \quad i_f \cong 21,55\% \text{ a.a.}$$

c) $i$ = 25% a.a.

$n$ = 2 (semestres)

$$i' = \frac{i}{n} = \frac{0,25}{2} = 0,125 \text{ a.s.}$$

$i_f$ = ?

$$i_f = (1 + 0,125)^2 - 1$$

$$i_f = 1,265625 - 1$$

$$i_f = 0,265625 \quad \text{ou} \quad i_f \cong 26,56\% \text{ a.a.}$$

21. A taxa de juros cobrada pelo Banco A é de 30% a.a., sendo sua capitalização anual. O Banco B, numa campanha promocional, informa que sua taxa é de 27% a.a., tendo como algo a diferenciá-la apenas o fato de sua capitalização ser mensal. Qual é a melhor taxa para o cliente?

*Resolução:*

É necessário que se calculem as taxas efetivas, pois somente estas serão comparáveis.

1º) Banco A:

$i_f$ = 30% a.a., pois o período de capitalização coincide com aquele a que se refere a taxa.

2º) Banco B:

$i_f$ = ?

$i$ = 27% a.a.

$n$ = 12 (meses)

$$i' = \frac{i}{n} = \frac{0{,}27}{12} = 0{,}0225 \text{ a.m.}$$

$$i_f = (1 + 0{,}0225)^{12} - 1$$

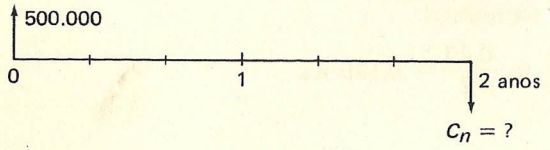
$$i_f = 1{,}30605 - 1$$

$$i_f = 0{,}30605 \quad \text{ou} \quad i_f \cong 30{,}61\% \text{ a.a.}$$

A melhor taxa de juros para o cliente é logicamente a oferecida pelo Banco A.

22. Uma empresa empresta Cr$ 500.000,00 de um banco cuja taxa de juros é de 21% a.a., com capitalizações quadrimestrais. Quanto deverá devolver ao fim de 2 anos?

*Resolução:*




$C_0 = 500.000$

$i' = 7\%$ a.q.

$n = 6$ (quadrimestres)

$C_n = ?$

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

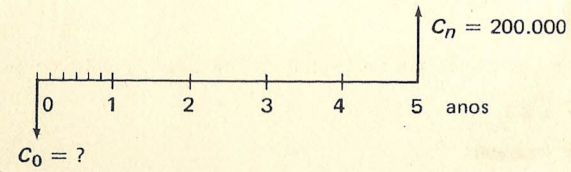
$$C_n = 500.000(1 + 0{,}07)^6$$

$$C_n = 500.000(1{,}500730)$$

$$C_n = \text{Cr\$ } 750.365{,}00$$

23. Quanto deve uma pessoa depositar em um banco que paga 24% a.a. com capitalizações bimestrais, para que ao fim de 5 anos possua Cr$ 200.000,00?

*Resolução:*






$C_n = 200.000$

$i' = 4\%$ a.b.

$n = 30$ bimestres

$C_0 = ?$

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

$$200.000 = C_0 (1 + 0{,}04)^{30}$$

$$200.000 = C_0 (3{,}243398)$$

$$C_0 = \frac{200.000}{3{,}243398}$$

$$C_0 = \text{Cr\$ } 61.663{,}72$$

24. Qual é a taxa nominal anual, com capitalizações semestrais, que conduz à taxa efetiva de 40% a.a.?

*Resolução:*

Temos que:

$$i_f = (1 + i')^n - 1$$

onde: $i' = \frac{i}{n} \Longrightarrow i = i'n$

Então:

$$0{,}40 = (1 + i')^2 - 1$$

$$1{,}40 = (1 + i')^2$$

$$\sqrt{1{,}40} = 1 + i'$$

$$1{,}183216 = 1 + i'$$

$$\therefore i' = 0{,}183216$$

Portanto:

$$i = 2(0{,}183216)$$

$$\therefore i = 0{,}366432 \quad \text{ou} \quad i = 36{,}64\% \text{ a.a.}$$

## 9. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Qual é o montante gerado por um capital de Cr$ 1.000,00 aplicado pelos prazos e taxas abaixo:
   a) 1% a.m. – 12 meses
   b) 1,5% a.m. – 3 anos

c) 3% a.t. – 18 meses
d) 10% a.a. – 120 meses
e) 5% a.s. – 5 anos
f) 1% a.a. – 2 anos
g) 100% a. dia – 1 semana
h) 250% a quinzena – 2 meses

2. Que juro receberá uma pessoa que aplique Cr$ 1.000,00 conforme as hipóteses abaixo:
a) 2% a.m. – 1 ano
b) 1,5% a.t. – 2 anos
c) 7% a.s. – 36 meses
d) 1 000% cada dez dias – 1 mês
e) 150% a semana – 21 dias
f) 10% cada primavera – 3 anos

3. Certa pessoa pretende comprar uma casa por Cr$ 500.000,00, daqui a 6 anos. Quanto deve aplicar esta pessoa hoje para que possa comprar a casa no valor e prazo estipulados, se a taxa de juros for:
a) 3% a.t.
b) 1% a.m.
c) 15% a.a.
d) 50% a.s.

4. Para ter Cr$ 100.000,00 quanto devo aplicar hoje, se as taxas e prazos são os seguintes:
a) 2,5% a.m. – 1 semestre
b) 15% a.q. – 4 anos
c) 50% ao dia – 10 dias
d) 0% a.a. – 2 meses

5. O preço de um carro é Cr$ 11.261,62, podendo este valor ser pago até o prazo máximo de 6 meses. Quem optar pelo pagamento a vista beneficia-se de um desconto de 11,2%. Qual é a taxa de juro cobrada nesta operação?

6. O banco *X* anuncia que sua taxa para empréstimo pessoal é de 2,5% a.m. Um cliente retirou Cr$ 20.000,00 e quando foi saldar sua dívida o gerente lhe disse que esta importava em Cr$ 31.193,17. Quanto tempo levou o cliente para restituir o empréstimo?

7. Certa loja tem como política de vendas a crédito exigir 30% do valor da mercadoria a vista como entrada e o restante a ser liquidado em até 3 meses. Neste caso, o valor da mercadoria sofre um acréscimo de 10% a título de despesas administrativas. Qual é a taxa de juros anual desta loja?

8. Um sítio é posto a venda por Cr$ 50.000,00 de entrada e Cr$ 100.000,00 em 1 ano. Como opção o vendedor pede Cr$ 124.000,00 a vista. Se a taxa de juros de mercado é de 2,5% a.m., qual a melhor alternativa?

9. Um investidor troca um título de Cr$ 10.000,00, vencível em 3 meses, por outro de Cr$ 13.500,00, vencível em 1 ano. Sabendo-se que a taxa de mercado é de 3% a.m., este investidor fez bom negócio? Que taxa ganhou por mês?



10. Um terreno é vendido por Cr$ 200.000,00 a vista. A prazo, o vendedor oferece dois planos:

a) Cr$ 50.000,00 de entrada
Cr$ 55.181,96 em 6 meses
Cr$ 126.824,18 em 12 meses

b) Cr$ 60.000,00 de entrada
Cr$ 102.480,77 em 6 meses
Cr$ 63.412,09 em 12 meses

Se a taxa de juro corrente for de 2% a.m., qual será a melhor alternativa?

**Sugestão:** Calcular a soma dos valores atuais, descontados para a data zero e à taxa dada, nas hipóteses de financiamento.

11. Entre suas muitas aplicações o Sr. Paulo tem um título com o valor de resgate de Cr$ 3.000,00 e outro com o valor de Cr$ 3.183,00, vencíveis, respectivamente, em 180 e 240 dias. Se a aplicação tivesse sido feita hoje, qual das duas seria a melhor, na hipótese de mesmo capital aplicado e taxa de mercado 3% a.a.?

12. Qual é a taxa equivalente anual às seguintes taxas:
a) 1% a.m.
b) 2% ao bimestre
c) 5% ao trimestre
d) 2,5% ao quadrimestre
e) 8% a.s.

13. Que taxas são equivalentes a 25% a.a., se os prazos respectivos forem:
a) 6 meses (semestral)
b) 4 meses (quadrimestral)
c) 3 meses (trimestral)
d) 2 meses (bimestral)
e) 1 mês (mensal)
f) 8 meses
g) 9 meses
h) 11 meses

14. Em 1975 a rentabilidade das Cadernetas de Poupança foi de 31,66% a.a. Qual a taxa de rentabilidade trimestral?

15. Certa loja vende um conjunto de som por Cr$ 10.000,00, podendo o pagamento ser efetuado sem nenhum acréscimo daqui a 4 meses. Contudo, se o cliente optar pelo pagamento a vista será bonificado com um abatimento de 10%. O custo de um empréstimo pessoal é de 2,7% a.m.; nestas condições vale a pena comprar a prazo?

16. Um grande magazine anuncia a venda de um jogo de rodas de magnésio por Cr$ 5.000,00 a vista ou Cr$ 1.000,00 de entrada e dois pagamentos mensais de Cr$ 2.120,78. Se a taxa de juros de mercado for de 42,58% a.a., compensa a compra a vista?

**Sugestão:** A mesma do problema nº 10, sendo desconhecida a taxa. Ao resolver a equação de 2º grau, considerar a raiz positiva.

17. O Produto Nacional Bruto de um país cresceu em 200% em 10 anos. Qual foi a taxa de crescimento anual?

18. Em quanto tempo dobra uma população que cresce 2,82% a.a.?

19. Um investidor aplicou Cr$ 5.000,00 por 30 meses à taxa de 10% a.a. Qual é o montante por ele recebido? (Convenções linear e exponencial.)

20. Com a finalidade de comprar um carro no valor de Cr$ 7.500,00, um rapaz aplica Cr$ 6.000,00 a taxa de 3% a.m. Quanto tempo levou para obter o valor do carro? (Convenções linear e exponencial.)

21. Qual é o montante auferido em um investimento de Cr$ 10.000,00 por 4 anos e 9 meses à taxa de 10% a.a.? (Convenções linear e exponencial.)

22. Uma aplicação em Caderneta de Poupança rendeu Cr$ 500,00 sobre um capital de Cr$ 800,00 em 1 ano e 3 meses. Qual é a taxa de rentabilidade anual? (Convenção exponencial.)

23. Tendo investido Cr$ 25.000,00 na Bolsa de Valores, João esperava ganhar 100% a.a. Qual seria o lucro recebido por ele ao fim de 1 ano e 8 meses, caso tal rentabilidade ocorresse? (Convenções linear e exponencial.)

24. A rentabilidade de uma aplicação é de 25% a.a. Sabendo-se que uma pessoa lucrou Cr$ 980,00 sobre um capital de Cr$ 2.500,00, pergunta-se quanto tempo ficou o dinheiro aplicado? (Convenções linear e exponencial.)

25. Qual é a taxa de juros para 13 meses, nas hipóteses (convenções linear e exponencial):
    a) 27% a.a.
    b) 6% a.s.
    c) 5% a.q.
    d) 10% a.t.

26. Qual é a taxa efetiva anual nas hipóteses abaixo:

| Taxa Nominal | – | Capitalização |
|---|---|---|
| a) 24% a.a. | – | mensal |
| b) 28% a.a. | – | trimestral |
| c) 21% a.a. | – | quadrimestral |
| d) 40% a.a. | – | semestral |
| e) 30% a.a. | – | anual |

27. Se o banco deseja ganhar 30% a.a. como taxa efetiva, que taxa nominal anual deverá pedir em cada hipótese de capitalização abaixo:
    a) mensal
    b) trimestral
    c) quadrimestral
    d) semestral

28. O Banco Alfa propõe a um cliente a taxa de juros de 40% a.a., sendo a capitalização anual. O cliente, entretanto, opta pelo financiamento de outro banco, pois sua taxa é de 36,5% a.a. Como detalhe deste segundo financiamento deve-se acrescentar que sua capitalização é diária. Qual é a melhor taxa?



29. Uma empresa toma emprestado Cr$ 100.000,00 pelo prazo de 2 anos. Se a taxa do banco for de 28% a.a., com capitalização trimestral, qual será o montante devolvido?

30. Se uma empresa deseja ganhar a taxa efetiva de 50% a.m., que capitalização deverá exigir para uma taxa nominal de 41,38% a.m.? (**Nota:** Solução por tentativa e erro.)

## Respostas

1. a) Cr$ 1.126,83
   b) Cr$ 1.709,14
   c) Cr$ 1.194,05
   d) Cr$ 2.593,74
   e) Cr$ 1.628,89
   f) Cr$ 1.020,10
   g) Cr$ 128.000,00
   h) Cr$ 150.062,50

2. a) Cr$ 268,24
   b) Cr$ 126,49
   c) Cr$ 500,73
   d) Cr$ 1.330.000,00
   e) Cr$ 14.625,00
   f) Cr$ 331,00

3. a) Cr$ 245.966,88
   b) Cr$ 244.248,08
   c) Cr$ 216.163,78
   d) Cr$ 3.853,67

4. a) Cr$ 86.229,72
   b) Cr$ 18.690,72
   c) Cr$ 1.734,15
   d) Cr$ 100.000,00

5. 2% a.m.

6. 18 meses.

7. 70,60% a.a.

8. Comprar a vista, pois o valor atual da outra alternativa é de Cr$ 124.355,58.

9. Sim. Ganhou 3,39% a.m.

10. O plano a), pois possui menor valor atual.

11. A aplicação para 240 dias é melhor, pois é superior em qualquer data de comparação.

12. a) 12,6825% a.a.
    b) 12,6162% a.a.
    c) 21,5506% a.a.
    d) 7,6891% a.a.
    e) 16,6400% a.a.

13. a) 11,803399% a.a.
    b) 7,721735% a.q.
    c) 5,737126% a.t.
    d) 3,789082% a.b.
    e) 1,876927% a.m.
    f) 16,040% em 8 meses
    g) 18,218% em 9 meses
    h) 22,697% em 11 meses

14. 7,1182% a.t.

15. Sim, pois a taxa é de 2,669% a.m.

16. Sim, pois a taxa da loja é de 4% a.m., equivalendo a 60,10% a.a.

17. 11,6123% a.a.

18. 24,9 anos

19. Cr$ 6.352,50 (convenção linear)
    Cr$ 6.345,29 (convenção exponencial)

20. 7 meses e 16 dias (convenção linear)
    7 meses e 16 dias (convenção exponencial)

21. Cr$ 15.739,08 (convenção linear)
    Cr$ 15.725,89 (convenção exponencial)

22. 47,46% a.a.

23. Cr$ 58.333,33 (convenção linear)
    Cr$ 54.370,05 (convenção exponencial)

24. 1 ano, 5 meses e 14 dias (convenção linear)
    1 ano, 5 meses e 24 dias (convenção exponencial)

25. Convenção linear
    a) 29,8575%
    b) 13,4836%
    c) 17,2095%
    d) 51,2903%

    Convenção exponencial
    a) 29,5550%
    b) 13,4565%
    c) 17,1832%
    d) 51,1361%

26. a) 26,82% a.a.
    b) 31,08% a.a.
    c) 22,50% a.a.
    d) 44,00% a.a.
    e) 30,00% a.a.

27. a) 26,53% a.a.
    b) 27,12% a.a.
    c) 27,42% a.a.
    d) 28,04% a.a.

28. A melhor taxa é a do Banco Alfa, pois é de 40,00% a.a., enquanto que a taxa efetiva do outro banco é de 44,03% a.a.

29. Cr$ 171.818,60

30. Capitalização a cada 3 dias.



# Apêndice

## 1. TAXAS EQUIVALENTES EM PERÍODOS QUAISQUER

Sejam as taxas:

$i_n$ = referente a $n$ períodos de tempo

$i_m$ = referente a $m$ períodos de tempo

Admitamos que $n$ e $m$ sejam números primos entre si, de tal modo que o M.M.C. (mínimo múltiplo comum) seja obtido por multiplicação direta. Nestas condições, ao tomarmos a taxa $i_n$ ($n$ períodos) e ao aplicar um capital a esta taxa, mas por $m$ períodos, estaremos fazendo uma aplicação pelo tempo total ($m \cdot n$), que é o M.M.C. dos tempos. O mesmo raciocínio vale para $i_m$.

Suponhamos uma aplicação $C_0$ na data focal zero. Para a taxa $i_n$, após $m$ períodos, o montante será:

$$C_m = C_0 (1 + i_n)^m$$

Analogamente, para a taxa $i_m$, após $n$ períodos, teremos:

$$C_n = C_0 (1 + i_m)^n$$

Como as aplicações do mesmo capital inicial foram feitas por um prazo igual (que é M.M.C. $= m \cdot n$), se as taxas forem equivalentes então os montantes serão iguais:

$$C_m = C_n$$

Ou seja:

$$C_0(1 + i_n)^m = C_0(1 + i_m)^n$$

$$(1 + i_n)^m = (1 + i_m)^n$$

Ou ainda:

$$[(1 + i_n)^m]^{1/m} = [(1 + i_m)^n]^{1/m}$$

$$1 + i_n = (1 + i_m)^{n/m}$$

$$\boxed{i_n = \sqrt[m]{(1 + i_m)^n} - 1}$$

*Exemplo:* Verificar se a taxa de 2,01% em *dois meses* é equivalente à taxa de 3,0301% em *três meses.*

*Resolução:*

a) direta:

Temos:

$i_n = 2{,}01\%$ para $n = 2$ meses

$i_m = 3{,}0301\%$ para $m = 3$ meses

Calculamos diretamente:

$$(1 + i_n)^m = (1 + i_2)^3 = (1{,}0201)^3 = 1{,}06152$$

$$(1 + i_m)^n = (1 + i_3)^2 = (1{,}030301)^2 = 1{,}06152$$

Como as taxas resultaram iguais quando capitalizadas para um mesmo intervalo de tempo, concluímos que são equivalentes.

b) pela fórmula:

$$1 + i_n = (1 + i_m)^{n/m}$$

$$1 + i_2 = (1 + i_3)^{2/3}$$

Usando logaritmos:

$$\log(1 + i_2) = \log(1 + i_3)^{2/3}$$

$$\log(1 + i_2) = \frac{2}{3}\log(1{,}030301)$$

Procurando numa tabela de logaritmos (ver Bibliografia), achamos:

$$\log 1{,}030301 = 0{,}01296$$

Portanto:

$$\log(1 + i_2) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}01296$$

$$\log(1 + i_2) = 0{,}008643$$



Extraindo-se o antilogaritmo:

$$1 + i_2 = 1{,}0201$$

$$\therefore\ i_2 = 0{,}0201$$

Observe-se que partindo da *segunda taxa* ($i_3$) obtivemos um valor igual ao da *primeira taxa* ($i_2$). Portanto, as duas taxas são equivalentes.

## 2. POTENCIAÇÃO A EXPOENTES FRACIONÁRIOS

*Exemplo:* Um capital de Cr$ 1.000,00 é emprestado à taxa de juros compostos de 10% a.a., pelo prazo de 5 anos e 7 meses. Sendo a capitalização anual, qual será o montante?

*Resolução:*

Admitindo-se a convenção exponencial, aplicamos diretamente a fórmula (24):

$$C'_{n,\,p/q} = C_0(1 + i)^{n + p/q}$$

$$C'_{5,\,7/12} = 1.000(1{,}10)^{5 + 7/12}$$

$$C'_{5,\,7/12} = 1.000(1{,}10)^{5{,}5833}$$

O problema agora é obter $(1{,}10)^{5{,}5833}$, o que se pode fazer, em termos práticos, de dois modos:

I) *Por logaritmos:*

Pondo:

$$x = (1{,}10)^{5{,}5833}$$

$$\log x = \log(1{,}10)^{5{,}5833}$$

$$\log x = 5{,}5833 \log 1{,}10$$

$$\log x = 5{,}5833 \cdot 0{,}4139$$

$$\log x \cong 0{,}23111$$

Extraindo-se o antilogaritmo:

$$x = (1{,}10)^{5{,}5833} \cong 1{,}702581$$

Portanto:

$$C'_{5,\,7/12} = 1.000 \cdot 1{,}702581 = \text{Cr\$ } 1.702{,}58$$

II) *Por tentativa e erro:*

Este método de resolução é indicado quando se dispõe de máquina de calcular eletrônica. Para exemplificar, voltemos ao problema:

$$C'_{5,\,7/12} = 1.000(1{,}10)^{5 + 7/12}$$

$$C'_{5,\,7/12} = 1.000(1{,}10)^5[(1{,}10)^{1/12}]^7$$

Devemos calcular em primeiro lugar:

$(1{,}10)^{1/12} = \sqrt[12]{1{,}10}$

Nosso problema é achar:

$\sqrt[n]{1 + i} = 1 + i_1$

Onde:

$i$ = é a taxa dada

$i_1$ = é a taxa de juros equivalente cujo valor queremos determinar.

Ou seja, queremos achar a raiz positiva $(i_1)$ da equação:

$(1 + i_1)^n - (1 + i) = 0$

Utilizando o *método de Newton* para achar as raízes de uma equação, temos a relação seguinte:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Onde:

$x_k$ = é uma primeira estimativa da raiz a ser calculada;

$f(x_k)$ = é o valor da função quando se admite a estimativa inicial $(x_k)$;

$f'(x_k)$ = é o valor da derivada primeira da função, quando se admite a estimativa inicial $(x_k)$.

O leitor deve observar que a relação dada é uma *fórmula de recorrência*, ou seja, dado um valor $(x_k)$ ela permite que se calcule outro $(x_{k+1})$ de tal modo que, por um processo de iteração, cheguemos à solução procurada. Como a solução pode não ser exata, deveremos fazer tantas iterações quantas sejam necessárias, de modo a obter uma solução que seja satisfatória quanto ao *erro cometido*.

Como o número de iterações depende, no nosso caso, do valor inicial, vamos admitir que:

$x_k = 1 + i'_k$

Onde:

$i'_k = \frac{i}{n}$

Ou seja, vamos utilizar como estimativa inicial $(x_k)$ a taxa proporcional.



Por outro lado, temos:

$f(x_k) = (1 + i'_k)^n - (1 + i)$

E, portanto:

$f'(x_k) = n(1 + i'_k)^{n-1}$

Substituindo-se estes valores na fórmula de iteração dada, tem-se:

$$(1 + i_{k+1}) = \frac{n-1}{n}\left[(1 + i'_k) + \frac{(1+i)}{(n-1)(1+i'_k)^{(n-1)}}\right]$$

Deveremos ter ainda:

$n$ = inteiro e positivo

$i \geqslant 0$

Voltando ao problema, queremos calcular: $\sqrt[12]{1{,}10}$.

Fazendo-se:

$i'_k = \frac{0{,}10}{12} = 0{,}008333\ldots$

Temos:

$$\sqrt[12]{1{,}10} \cong \frac{12-1}{12}\left[1{,}008333 + \frac{1{,}10}{(12-1)(1{,}008333)^{(12-1)}}\right] =$$

$$= \frac{11}{12}\left[1{,}008333 + \frac{1{,}10}{11\,(1{,}008333)^{11}}\right] =$$

$$= \frac{11}{12}\left[1{,}008333 + \frac{1{,}10}{11 \times 1{,}095579}\right] =$$

$$= \frac{11}{12}\left[1{,}008333 + \frac{1{,}10}{12{,}051371}\right] =$$

$$= \frac{11}{12}\left[1{,}008333 + 0{,}091276\right] =$$

$$= \frac{11}{12}\left[1{,}099609\right] = 1{,}007975$$

Para verificar se a aproximação já é suficiente, fazemos o teste seguinte:

$(1{,}007975)^{12} \cong 1{,}100011$

Logo, podemos dizer que:

$\sqrt[12]{1,10} \cong 1,007975$

Utilizando este resultado, temos:

$C'_{5,\,7/12} = 1.000\,(1,10)^5\,(1,007975)^7 =$

$= 1.000\,(1,610510)\,(1,057179) \cong$

$\cong 1.000\,(1,70260) \cong 1.702,60$

Portanto:

$C'_{5,\,7/12} \cong 1.702,60$

Ou seja, comparando-se este resultado com o que se obteve antes, constatamos que eles são praticamente iguais.

**Observação:** Respeitadas as restrições, a fórmula de iteração dada vale de modo geral. Seu uso, entretanto, deve ser precedido de uma análise prévia para ver se o número de iterações não será muito grande. Isto ocorrerá, por exemplo, quando a taxa e/ou o número de períodos forem grandes.

*Exemplo:* Aplicando-se Cr$ 1.000,00 por um prazo de 15 anos, obteve-se um montante igual a Cr$ 4.177,25. Pergunta-se qual a taxa de capitalização anual empregada.

*Resolução:*

$4.177,25 = 1.000,00\,(1 + i)^{15}$

$(1 + i)^{15} = 4,17725$

$1 + i = \sqrt[15]{4,17725}$

Neste caso, a taxa proporcional é:

$$i'_k = \frac{3,17725}{15} = 0,2118$$

Operando com esta estimativa inicial, *apenas na quarta iteração* estaremos obtendo a taxa aproximada que é de 10% a.a. Neste caso, então, recomenda-se o uso de logaritmos que fornecem a solução de modo mais rápido.

## 3. CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA

Admitamos uma importância de Cr$ 1.000,00, que pode ser aplicada por 1 ano à taxa de 12% a.a. e nas seguintes hipóteses de capitalização:



- anual
- semestral
- trimestral
- mensal
- diária

Vejamos o montante que resulta em cada uma das hipóteses de capitalização:

| *Capitalização* | *Montante (Cr$)* |
|---|---|
| Anual | 1.120,00 |
| Semestral | 1.123,60 |
| Trimestral | 1.125,51 |
| Mensal | 1.126,83 |
| Diária | 1.127,47 |

Constatamos que o valor do montante *aumenta* à medida que aumentamos o número de capitalizações de uma dada taxa nominal. À primeira vista parece, inclusive, que o valor do montante cresce indefinidamente, à medida que as capitalizações vão sendo feitas com maior freqüência. Vejamos então o que ocorre quando admitimos uma capitalização *horária*:

$$C_h = 1.000\left(1 + \frac{0,12}{24 \times 365}\right)^{24 \times 365}$$

$C_h \cong 1.000\,(1 + 0,000013699)^{8760}$

$C_h \cong 1.127,49$

Este resultado nos permite inferir que o valor do montante não cresce indefinidamente com a freqüência de capitalização, tendendo para um limite. E, de fato, se admitirmos uma capitalização *infinitamente* grande, ou seja, que a capitalização seja feita em intervalos de tempo infinitesimais, teremos o montante como sendo:

$C \cong$ Cr$ 1.127,50

### 3.1. Cálculo do montante em capitalização contínua

Seja:

$$C_{nk} = C_0\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn}$$

$$C_{nk} = C_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{k}{i}}\right)^{\frac{k}{i} \cdot ni}$$

Fazendo-se:

$$k' = \frac{k}{i}$$

Temos:

$$C_{nk} = C_0 \left(1 + \frac{1}{k'}\right)^{k'ni}$$

$$C_{nk} = C_0 \left[\left(1 + \frac{1}{k'}\right)^{k'}\right]^{ni}$$

Se:

$$k \to \infty \Longrightarrow k' \to \infty$$

Então:

$$C'_n = \lim_{k' \to \infty} (C_{nk}) = \lim_{k' \to \infty} \left\{ C_0 \left[\left(1 + \frac{1}{k'}\right)^{k'}\right]^{ni} \right\}$$

$$C'_n = C_0 \left[ \lim_{k' \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k'}\right)^{k'} \right]^{ni}$$

Demonstra-se em cálculo que:

$$\lim_{k' \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k'}\right)^{k'} = e$$

Onde $e$ é um número irracional que serve de base para os logaritmos naturais ou neperianos ($e = 2{,}718281828459\ldots$).

Portanto, tem-se:

$$C'_n = C_0 e^{ni}$$

A taxa $i$ é chamada *taxa instantânea* e a notação comumente adotada é a letra grega $\delta$ (delta). Escreveremos então:

$$\boxed{C'_n = C_0 e^{n\delta}}$$

O conceito de capitalização contínua perde muito do seu significado nas aplicações práticas, e por isto raramente é usado. Porém, existem ocasiões



em que se admite que os fluxos monetários não são devidos ou recebidos em dado instante, mas que se encontram distribuídos no tempo. É o caso, por exemplo, da geração de lucro na operação de uma empresa, que ocorre ao longo do ano e que pode ser associado a um fluxo uniforme. O mesmo se dá com o desgaste dos equipamentos (depreciação) e, como as *entradas de caixa* são constituídas de lucros gerados *mais* depreciação, podemos dizer que este é um fluxo que pode ser considerado uniformemente distribuído no tempo.

Neste caso, e no tratamento matemático de certos modelos decisórios, o conceito de capitalização contínua é muito útil.

*Exemplo:* Calcular o montante que resulta quando Cr$ 1.000,00 são aplicados à taxa de juros de 12% a.a. por um prazo de 4 anos e com capitalização contínua. Comparar o resultado obtido com o resultante da aplicação nas mesmas condições em juros compostos.

*Resolução:*

*Capitalização contínua:*

$$C'_n = C_0 e^{n\delta}$$

onde:

$C_0 = 1.000{,}00$

$n = 4$ anos

$\delta = 12\%$ a.a.

Então:

$$C'_n = 1.000{,}00\, e^{4 \times 0{,}12}$$

$$C'_n = 1.000{,}00\, e^{0{,}48}$$

$$ln(C'_n) = ln(1.000{,}00) + 0{,}48$$

$$ln(C'_n) = 6{,}907755 + 0{,}48$$

$$ln(C'_n) = 7{,}387755$$

$$\therefore C'_n \cong \text{Cr\$ } 1.616{,}07$$

**Nota:** É comum indicarem-se os logaritmos na base $e$ por $ln$ e os logaritmos na base $10$ por log.

*Capitalização em juros compostos:*

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

onde:

$C_0 = 1.000{,}00$

$n = 4$ anos

$i = 12\%$ a.a.

Nestas condições:

$$C_4 = 1.000{,}00(1{,}12)^4$$

$$C_4 \cong \text{Cr\$ } 1.573{,}52$$

Como se esperava o montante obtido quando se fez capitalização contínua (1.616,07) é maior que o obtido através de juros compostos (1.573,52). Este fato torna conveniente a determinação de uma taxa de juros efetiva que permita fazer-se a equivalência entre a capitalização contínua e a composta.

**Observação:** Um outro modo de visualizar-se o processo de capitalização contínua é o raciocínio feito através de juros simples.

Seja:

$$J = Cin$$

Em um período muito pequeno ($\Delta n$), podemos escrever que o juro ($\Delta J$), que também é um valor pequeno, é dado por:

$$\Delta J = Ci\Delta n$$

Por exemplo, aplicando-se Cr$ 1.000,00 à taxa de juros simples de 10% a.a., por 1 dia, teremos:

$$\Delta J = 1.000 \times 0{,}10 \times \frac{1}{365} = \text{Cr\$ } 0{,}27$$

Sabemos que o montante, em juros simples, é dado por:

$$M = C(1 + in)$$

$$M = C + Cin$$

Nestas condições, um acréscimo pequeno ao montante ($\Delta M$) pode ser expresso do seguinte modo:

$$\Delta M = Ci\Delta n$$

Fazendo-se com que o acréscimo seja cada vez menor, até tornar-se infinitesimalmente pequeno o período de capitalização ($dn$), teremos também acréscimos infinitesimais ao montante ($dM$), já que ambos são proporcionais:

$$dM = Cidn$$

Como o diferencial do montante é um acréscimo infinitesimal ao capital, podemos fazer:



$$dC = Cidn$$

$$\frac{dC}{C} = idn$$

$$d(lnC) = idn$$

Para obter o valor do montante temos de integrar esta expressão. Ou seja, temos de calcular a soma de seus infinitos termos e, nestas condições, estaremos fazendo uma capitalização contínua. A integração deve ser feita entre o principal ($C_0$) e o montante ($C'_n$) para o primeiro membro e entre a data de aplicação (zero) e de recebimento ($n$) para o segundo membro:

$$\int_{C_0}^{C'_n} d(lnC) = \int_0^n idn$$

$$ln(C'_n) - ln(C_0) = in$$

$$ln\left(\frac{C'_n}{C_0}\right) = in$$

$$\frac{C'_n}{C_0} = e^{in}$$

$$\therefore\ C'_n = C_0\, e^{in}$$

### 3.2. Taxa efetiva em capitalização contínua

Já foi visto que:

$$i_f + 1 = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k$$

Onde $i$ é a taxa de juros nominal e $i_f$ é a taxa efetiva.

Temos:

$$i_f + 1 = \left(1 + \frac{1}{\frac{k}{i}}\right)^{\frac{k}{i} \cdot i}$$

Fazendo:

$$\frac{k}{i} = k'$$

Temos:

$$i_f + 1 = \left(1 + \frac{1}{k'}\right)^{k'i}$$

No limite, fazendo-se $k' \to \infty$, colocamos $i_f = \delta$, que é a *taxa de juros instantânea*:

$$\delta + 1 = \lim_{k' \to \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{k'}\right)^{k'} \right]^{i} = e^{i}$$

Portanto:

$$\boxed{\delta = e^{i} - 1}$$

Podemos escrever também:

$$\delta + 1 = e^{i}$$

$$ln(\delta + 1) = ln e^{i}$$

$$\boxed{i = ln(\delta + 1)}$$

Deste modo, pode-se calcular a *taxa efetiva* ($\delta$) que resulta quando se capitaliza uma *taxa nominal* ($i$) de modo contínuo e vice-versa.

*Exemplo:* Dada a taxa de juros nominal de 12% a.a., determinar a taxa efetiva instantânea.

*Resolução:*

$$\delta = e^{i} - 1$$

$$\delta = e^{0,12} - 1$$

$$\delta \cong 1,1275 - 1$$

$$\delta \cong 0,1275 \quad \text{ou} \quad \delta \cong 12,75\% \text{ a.a.}$$

**Observação:** Existe também um outro problema: dada a taxa efetiva ($i$), poderemos querer determinar a taxa instantânea ($\delta$) que lhe seja equivalente.

Sendo:

$$i_f + 1 = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k}$$

$$1 + \frac{i}{k} = (i_f + 1)^{1/k}$$

$$\frac{i}{k} = (1 + i_f)^{1/k} - 1$$

$$i = k[(1 + i_f)^{1/k} - 1]$$

$$i = \frac{[(1 + i_f)^{1/k} - 1]}{\frac{1}{k}}$$



Portanto:

$$\delta = \lim_{k \to \infty} \left[ \frac{(1 + i_f)^{1/k} - 1}{\frac{1}{k}} \right] = ln(1 + i_f)$$

Logo:

$$\boxed{\delta = ln(1 + i_f)}$$

*Exemplo:* Sendo dada a taxa de juros efetiva de 12% a.a., determinar a taxa instantânea que lhe é equivalente.

*Resolução:*

$$\delta = ln(1 + i_f)$$

$$\delta = ln(1 + 0,12) \cong 0,1133$$

$$\delta \cong 11,33\% \text{ a.a.}$$

### 3.3. O número e

O número $e$, sendo irracional (como o número $\pi$), só pode ser expresso precisamente como o limite de uma série infinita e convergente ou como o limite de uma fração contínua.

O leitor poderá obter o valor de $e$ com a precisão desejada através da série seguinte:

$$\boxed{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots}$$

*Exemplo:*

$$e = 1 + \frac{1}{1!} = 2$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2,5$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cong 2,67$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \cong 2,7083$$

E procedendo deste modo, poder-se-á obter o valor de $e$ com a aproximação desejada.

# 5

# Descontos

O conceito de desconto em juros compostos é idêntico ao visto no regime de juros simples: corresponde ao abatimento por saldar-se um compromisso antes de seu vencimento.

A diferença é devida apenas ao regime de juros, sendo o raciocínio financeiro o mesmo. O que fazemos é calcular a diferença entre o valor nominal e o atual do compromisso na data em que se propõe seja feito o desconto. O *desconto* corresponde à quantia a ser abatida do valor nominal e o *valor descontado* é a diferença entre o valor nominal e o desconto.

Conceitualmente, existe apenas o desconto racional, sendo os desconto comercial e bancário convenções práticas. Daí a necessidade de se calcular a taxa de juros implícita na operação de desconto comercial. É importante enfatizar que o desconto comercial composto raramente é utilizado nas operações práticas e, por isto, foi colocado em anexo.

## 1. DESCONTO RACIONAL

É o desconto obtido pela diferença entre o *valor nominal* e o *valor atual* de um compromisso que seja saldado $n$ períodos antes do vencimento, calculado o valor atual à taxa de desconto.



Sendo:

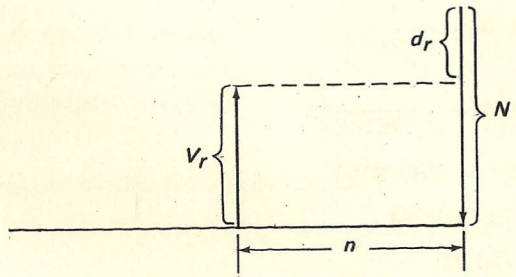
$N$ = valor nominal (ou montante) do compromisso em sua data de vencimento;

$n$ = número de períodos compreendido entre a data de desconto e a data de vencimento;

$i$ = taxa de juros utilizada na operação de desconto;

$d_r$ = desconto racional composto;

$V_r$ = valor descontado racional composto na data de desconto, calculado à taxa de desconto.




Nestas condições, o valor atual calculado no regime de juros compostos é o próprio *valor descontado* (ver fórmula 21):

$$V_r = \frac{N}{(1 + i)^n}$$

O *desconto* é obtido fazendo-se a diferença entre o valor nominal e o valor descontado:

$$d_r = N - V_r$$

$$d_r = N - \frac{N}{(1 + i)^n}$$

$$\boxed{d_r = N\left[1 - \frac{1}{(1 + i)^n}\right]}$$

O cálculo do *desconto* racional é simplificado pelo uso de máquinas de calcular e/ou tabelas de $(1 + i)^n$. No apêndice a este capítulo o leitor encontrará outras fórmulas para o cálculo de $d_r$.

*Exemplo:* Um título no valor de Cr$ 10.000,00 foi saldado seis meses antes de vencer. O possuidor do título obteve uma taxa de desconto (composta) de 2% a.m. Qual o desconto racional e qual a quantia recebida?

*Resolução:* $N = 10.000,00$

$i = 2\%$ a.m.

$n = 6$ meses

Tem-se:

$$d_r = N\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$d_r = 10.000\left[1 - \frac{1}{(1,02)^6}\right]$$

$$d_r = 10.000\left[1 - \frac{1}{1,126162}\right]$$

$$d_r = 10.000[1 - 0,887972]$$

$$d_r = 10.000[0,112028]$$

$$d_r = \text{Cr\$ } 1.120,28$$

E a quantia paga:

$$V_r = N - d_r$$

$$V_r = 10.000,00 - 1.120,28$$

$$V_r = \text{Cr\$ } 8.879,72$$

Ou, de outro modo:

$$V_r = \frac{N}{(1+i)^n} = \frac{10.000}{(1,02)^6}$$

$$V_r = \frac{10.000}{1,126162} = \text{Cr\$ } 8.879,72$$

Observe que, se *aplicarmos* o valor descontado por 6 meses à taxa de juros compostos de 2% a.m., obteremos:

$$C_6 = C_0(1+i)^6$$

$$C_6 = 8.879,72(1,02)^6$$

$$C_6 = 8.879,72(1,126162)$$

$$C_6 \cong 10.000,00$$



E os *juros devidos* são dados por:

$$J_6 = C_6 - C_0$$

$$J_6 = 10.000,00 - 8.879,72$$

$$J_6 = 1.120,28$$

$$\therefore J_6 = d_r$$

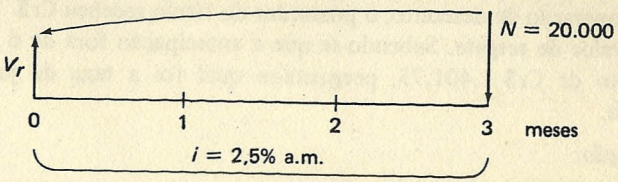
Isto evidencia que o desconto racional composto é igual ao *juro devido* no período de antecipação, desde que calculado à taxa de desconto.

## 2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Um título de valor nominal de Cr$ 20.000,00 foi resgatado 3 meses antes de seu vencimento, tendo sido contratada a taxa de 2,5% a.m. Qual foi o desconto racional concedido?

*Resolução:*

Graficamente se tem a situação seguinte:




$$d_r = N\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

para simplificar a notação passaremos a indicar $\frac{1}{(1+i)^n}$ por $(1+i)^{-n}$

$N = 20.000$

$i = 2,5\%$ a.m.

$n = 3$ meses

$d_r = ?$

$$d_r = 20.000[1 - (1,025)^{-3}]$$

$$d_r = 20.000[1 - 0,928599]$$

$$d_r = 20.000(0,071401)$$

$$\therefore d_r = \text{Cr\$ } 1.428,02$$

2. Ao descontar uma Nota Promissória no valor de Cr$ 5.000,00 no vencimento, a financeira informou que sua taxa de desconto racional era de 30% a.a. Se o desconto fosse efetuado 2 meses antes do vencimento, qual seria o valor líquido (valor de resgate) recebido pelo possuidor do título?

*Resolução:*

$N = 5.000$

$i = 30\%$ a.a.

$n = 2$ meses

$V_r = ?$

$V_r = N(1 + i)^{-n}$

$V_r = 5.000[(1,30)^{1/12}]^{-2}$

$V_r = 5.000\,[1,022104]^{-2}$

$V_r = 5.000\,(0,957215)$

$V_r = \text{Cr\$ } 4.786,07$

3. Numa operação de desconto, o possuidor do título recebeu Cr$ 10.000,00 como valor de resgate. Sabendo-se que a antecipação fora de 6 meses e o desconto de Cr$ 1.401,75, pergunta-se qual foi a taxa de juros anual adotada.

*Resolução:*

$V_r = 10.000$

$d_r = 1.401,75$

$n = 6$ meses

$i = ?$

$V_r = N - d_r \Longrightarrow N = V_r + d_r$

$\therefore\ N = 10.000 + 1.401,75 = 11.401,75$

$V_r = N(1 + i)^{-n}$ ou $N = V_r(1 + i)^n$

$10.000 = 11.401,75\,(1 + i)^{-6/12}$ (considerando-se $i$ = taxa anual)

$$(1 + i)^{6/12} = \frac{11.401,75}{10.000}$$

$(1 + i)^{1/2} = 1,140175$

$[(1 + i)^{1/2}]^2 = (1,140175)^2$



$1 + i = 1,30$

$\therefore\ i = 0,30$ ou $i = 30\%$ a.a.

4. Em um título no valor nominal de Cr$ 6.500,00, o desconto sofrido foi de Cr$ 835,63. Se a taxa de juros de mercado for de 3,5% a.m., qual deverá ser o prazo de antecipação?

*Resolução:*

$N = 6.500$

$d_r = 835,63$

$i = 3,5\%$ a.m.

$n = ?$

$d_r = N[1 - (1 + i)^{-n}]$

$835,63 = 6.500[1 - (1,035)^{-n}]$

$$\frac{835,63}{6.500} = 1 - (1,035)^{-n}$$

$0,128558 = 1 - (1,035)^{-n}$

$1 - 0,128558 = (1,035)^{-n}$

$$0,871442 = \frac{1}{(1,035)^n}$$

$$\frac{1}{0,871442} = (1,035)^n$$

$1,147524 = (1,035)^n$

Podemos procurar na tabela de 3,5% ou então resolver por logaritmos:

$\log 1,147524 = n \log 1,035$

$0,059762 = n(0,014940)$

$$n = \frac{0,059762}{0,014940}$$

$\therefore\ n = 4$ meses (os períodos são mensais, pois a taxa se acha expressa em termos mensais)

5. O valor nominal de um compromisso é de 5 vezes o desconto racional, caso a antecipação seja de 8 meses. Qual é o seu valor nominal, se o valor de resgate é de Cr$ 1.740,00?

*Resolução:*

$V_r = 1.740$

$n = 8$

Se $N = 5d_r$, então: $\frac{N}{d_r} = 5$ e $\frac{d_r}{N} = \frac{1}{5} = 0{,}20$

Portanto:

$$d_r = N[1 - (1 + i)^{-n}]$$

$$\frac{d_r}{N} = 1 - (1 + i)^{-n}$$

$$0{,}20 = 1 - (1 + i)^{-8}$$

$$1 - 0{,}20 = (1 + i)^{-8}$$

$$0{,}80 = (1 + i)^{-8}$$

$$\frac{1}{0{,}80} = (1 + i)^{8}$$

$$1{,}25 = (1 + i)^{8}$$

$$(1{,}25)^{1/8} = 1 + i$$

$$1{,}028286 = 1 + i$$

$$\therefore\ i = 0{,}028286 \quad \text{ou} \quad i \cong 2{,}83\%\ \text{a.m.}$$

Encontrada a taxa, o cálculo do valor nominal torna-se direto:

$$N = V_r(1 + i)^n$$

$$N = 1.740(1{,}028286)^8$$

$$N = 1.740(1{,}25) \Longrightarrow N = \text{Cr\$ } 2.175{,}00$$

**Nota:** É óbvio que o cálculo do valor nominal já poderia ter sido feito quando se chegou a $\frac{1}{0{,}80} = (1 + i)^8$, não sendo necessário calcular a taxa equivalente mensal.

## 3. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Uma Letra de Câmbio no valor nominal de Cr$ 12.000,00 foi resgatada 3 meses antes de seu vencimento. Qual é o valor de resgate, se a taxa de juros correntes for de 2,5% a.m.? (Considerar desconto racional.)



2. Se existe a possibilidade de ganhar 3% a.m., que desconto racional devo exigir na compra de um título no valor nominal de Cr$ 15.800,00, vencível em 2 meses?

3. Pedro receberá Cr$ 20.000,00 como parte sua numa herança. Contudo, necessitando do dinheiro 4 meses antes da data de recebimento, propõe a um amigo a venda de seus direitos por Cr$ 16.454,05. Que taxa de juros anual Pedro pagou?

4. Um investidor aplicou Cr$ 9.440,00 em Certificado de Depósito Bancário pelo prazo de 360 dias, contratando-se a taxa de 25% a.a. Após certo tempo, vende o C.D.B. por Cr$ 10.791,60, quando então a taxa de desconto racional era de 19,56% a.a. Quanto tempo antes do vencimento a transferência foi feita?

5. Numa antecipação de 6 meses, o desconto racional foi de Cr$ 718,94. Qual é o valor nominal do título, uma vez que a taxa de juros anual é de 30% a.a.?

6. O valor nominal de uma aplicação para 450 dias é de Cr$ 4.500,00. Qual será a taxa de juros anual cobrada, se a antecipação for de 90 dias e o desconto racional de Cr$ 261,02?

7. No vencimento, um título será resgatado por Cr$ 10.000,00. O investidor quer saber quanto tempo poderá antecipar seu resgate para que, havendo um desconto racional de Cr$ 1.548,46, a taxa de juros cobrada seja de 40% a.a.

8. O quociente do valor de resgate sobre o valor atual, descontado racionalmente, é de 1,0573713, considerando-se uma antecipação de 90 dias. Qual é a taxa de juros anual?

9. Se o valor nominal for igual a 25 vezes seu desconto racional resultante de um resgate 2 meses antes do vencimento, qual é a taxa de juros anual?

10. Um amigo propõe a outro a venda de uma Letra de Câmbio por Cr$ 16.922,71. O comprador em potencial diz que lhe interessa, tão-somente, se for possível ganhar 28% a.a. Se o valor de resgate for de Cr$ 18.000,00, qual deve ser o prazo de antecipação?

### Respostas

1. Cr$ 11.143,19
2. Cr$ 906,98
3. 79,59% a.a.
4. 6 meses
5. Cr$ 5.847,80
6. 27% a.a.
7. 6 meses
8. 25% a.a.
9. 27,75% a.a.
10. 3 meses

# Apêndice

## 1. OBSERVAÇÕES SOBRE O DESCONTO RACIONAL

a) Como já se observou, o desconto racional composto é igual aos juros que seriam devolvidos no intervalo de tempo compreendido entre a data de desconto e a de vencimento.

Então, tem-se:

$$d_r = J_n$$

Onde:

$$J_n = C_0[(1 + i)^n - 1]$$

Substituindo-se $C_0$ por $V_r$, uma vez que é este o valor da "aplicação", tem-se:

$$J_n = V_r[(1 + i)^n - 1]$$

$$d_r = V_r[(1 + i)^n - 1]$$

Este modo de se expressar o desconto é menos utilizado na prática, pois pressupõe que já se conheça o valor descontado.

b) Partindo-se da fórmula que expressa o desconto racional composto:

$$d_r = N\left[1 - \frac{1}{(1 + i)^n}\right]$$

$$d_r = N\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n}\right]$$



Multiplicando e dividindo o segundo membro por $i$:

$$d_r = N\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n i}\right] i$$

$$d_r = N \cdot i \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Veja no capítulo de *Anuidades* o significado de $a_{\overline{n}|i}$. Esta fórmula é muito útil nas aplicações práticas, pois o valor de $a_{\overline{n}|i}$ se encontra tabelado ou é calculado diretamente em várias máquinas eletrônicas.

## 2. DESCONTO COMERCIAL

É o desconto obtido ao saldar-se um compromisso $n$ períodos antes de seu vencimento. O *valor descontado comercial* é obtido do seguinte modo:

a) calcula-se o *juro simples* à taxa dada sobre o valor nominal, para o primeiro período dos $n$ períodos que serão considerados no desconto;

b) faz-se a diferença entre o valor nominal e o juro calculado na etapa anterior. Esta diferença será o novo "valor nominal" para o próximo período de desconto e sobre o qual será aplicada a taxa de juros;

c) repete-se o processo para os $n$ períodos do desconto. A última diferença será o valor descontado comercial procurado.

Sejam:

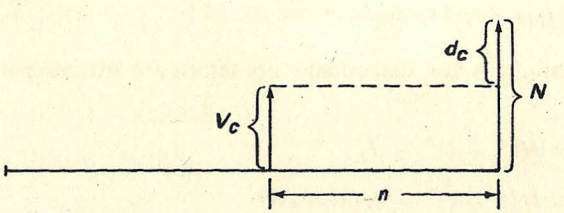
$N$ = valor nominal (ou montante) do compromisso na data de vencimento;

$n$ = número de períodos compreendidos entre a data de desconto e a data de vencimento;

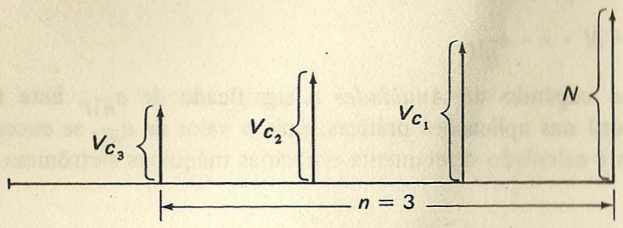
$i$ = taxa de juros utilizada na operação de desconto comercial;

$d_c$ = desconto comercial composto;

$V_c$ = valor descontado comercial composto, na data de desconto e calculado à taxa de desconto comercial.



Suponhamos inicialmente que $n = 3$ e que vamos calcular o valor descontado comercial a partir do valor nominal $N$, período por período.




O juro simples no primeiro período, calculado sobre o valor nominal e desde que a taxa esteja na forma unitária e referida ao próprio período, é dado por:

$$J_1 = N \cdot i$$

Portanto, o primeiro valor descontado fica sendo:

$$V_{c_1} = N - J_1$$

$$V_{c_1} = N - Ni$$

$$V_{c_1} = N(1 - i)$$

Agora o novo valor nominal é igual a $N(1 - i)$ e o juro simples sobre este valor nominal é igual a:

$$J_2 = N(1 - i) \cdot i$$

Logo, o segundo valor descontado pode ser expresso como:

$$V_{c_2} = V_{c_1} - J_2 = N(1 - i) - N(1 - i)i$$

$$V_{c_2} = N(1 - i)(1 - i)$$

$$V_{c_2} = N(1 - i)^2$$

O valor nominal agora é $N(1 - i)^2$ e o juro simples fica sendo:

$$J_3 = N(1 - i)^2 \cdot i$$

Portanto, o valor descontado no terceiro e último período é dado por:

$$V_{c_3} = N(1 - i)^2 - J_3$$

$$V_{c_3} = N(1 - i)^2 - N(1 - i)^2 i$$



Colocando-se $N(1 - i)^2$ em evidência:

$$V_{c_3} = N(1 - i)^2(1 - i)$$

$$V_{c_3} = N(1 - i)^3$$

É fácil ver agora que o *valor descontado comercial*, para $n$ períodos antes do vencimento do título, pode ser expresso, generalizando-se o raciocínio anterior, do seguinte modo:

$$\boxed{V_c = N(1 - i)^n}$$

E o *desconto comercial composto* pode ser expresso como sendo:

$$d_c = N - V_c$$

$$d_c = N - N(1 - i)^n$$

$$\boxed{d_c = N\left[1 - (1 - i)^n\right]}$$

Vamos resolver o mesmo exercício do item 2 do texto, para poder comparar os dois tipos de desconto:

*Exemplo:* Um título no valor de Cr$ 10.000,00 foi saldado 6 meses antes de vencer. O possuidor do título obteve uma taxa de desconto comercial (composta) de 2% a.m. Qual o desconto comercial e qual a quantia recebida?

*Resolução:*

$N = 10.000,00$

$i = 2\%$ a.m.

$n = 6$ meses

Temos o desconto como sendo:

$$d_c = N\left[1 - (1 - i)^n\right]$$

$$d_c = 10.000[1 - (1 - 0,02)^6]$$

$$d_c = 10.000[1 - (0,98)^6]$$

$$d_c = 10.000[1 - 0,885842]$$

$$d_c = 10.000[0,114158]$$

$$d_c = \text{Cr\$ } 1.141,58$$

O valor descontado é:

$V_c = N(1 - i)^n$

$V_c = 10.000\,(1 - 0{,}02)^6$

$V_c = 10.000\,(0{,}98)^6$

$V_c = 10.000\,(0{,}885842)$

$V_c = \text{Cr\$ } 8.858{,}42$

Vamos comparar estes resultados com aqueles obtidos no correspondente desconto racional:

| $d_r$ | $d_c$ | $V_r$ | $V_c$ |
|---|---|---|---|
| 1.120,28 | 1.141,58 | 8.879,72 | 8.858,42 |

Constatamos que o desconto comercial composto é *maior* que o correspondente desconto racional composto. Em conseqüência, o valor descontado racional composto é maior que o correspondente valor descontado comercial composto. Esta conclusão coincide com aquela obtida para o regime de juros simples.

Pelo fato de que, conceitualmente só existe o desconto racional, é necessário que se calcule a *taxa implícita* na operação. Esta taxa será tal que, aplicada ao valor descontado comercial pelo prazo do desconto, reproduz o valor nominal.

O banco que fez o desconto comercial pagou Cr$ 8.858,42 por um título que será resgatado após 6 meses por Cr$ 10.000,00. Logo, o rendimento para o banco é de:

$10.000{,}00 = 8.858{,}42\,(1 + i)^6$

$(1 + i)^6 = \dfrac{10.000{,}00}{8.858{,}42}$

$(1 + i)^6 = 1{,}128869$

$6 \log (1 + i) = \log (1{,}128869)$

$\log (1 + i) = \dfrac{1}{6} \cdot 0{,}052644$

$\log (1 + i) = 0{,}008774$

$1 + i = \text{antilog } (0{,}008774)$

$1 + i = 1{,}020408$

$i \cong 0{,}02041$ a.m.



ou

$i \cong 2{,}041\%$ a.m.

Constatamos que, a uma *taxa nominal* de 2% a.m. que o banco diz ter cobrado, corresponde na realidade uma *taxa efetiva* de 2,041% a.m.

## 2.1. Taxa efetiva e taxa nominal

Ao analisarmos as operações de desconto, constatamos que as taxas cobradas no desconto comercial eram diferentes daquelas cobradas no desconto racional. Ou seja, ao fazermos uma operação de desconto pelo critério comercial ou racional, nas mesmas condições, verificamos que a taxa realmente cobrada no desconto comercial é maior.

Podemos dizer então que a *taxa nominal* é aquela que se diz estar sendo cobrada na operação ou, em outras palavras, é a taxa que foi negociada e aceita pelas partes.

A *taxa efetiva* é a que realmente foi cobrada, no seguinte sentido: se o valor descontado comercial for aplicado a esta taxa, pelo período considerado, obter-se-á um montante igual ao valor nominal.

Vejamos este conceito em forma literal.

Sendo:

$i_f$ = taxa efetiva

$i$ = taxa nominal

$d_r$ = desconto racional composto

$d_c$ = desconto comercial composto

$n$ = número de períodos entre a data de desconto e a do vencimento

Considerando as fórmulas de desconto:

$$d_r = N\left[1 - \frac{1}{(1 + i)^n}\right]$$

$$d_c = N\left[1 - (1 - i)^n\right]$$

Como a *taxa efetiva* conduzirá, pelo desconto racional, ao mesmo valor calculado pelo desconto comercial, temos que a taxa do desconto racional é a própria taxa efetiva:

$$d_r = N\left[1 - \frac{1}{(1 + i_f)^n}\right]$$

Queremos determinar $i_f$ *de modo que:*

$d_r = d_c$

Então:

$$\cancel{N}\left[1 - \frac{1}{(1 + i_f)^n}\right] = \cancel{N}[1 - (1 - i)^n]$$

$$1 - \frac{1}{(1 + i_f)^n} = 1 - (1 - i)^n$$

$$\frac{1}{(1 + i_f)^n} = (1 - i)^n$$

$$(1 + i_f)^{-n} = (1 - i)^n$$

Elevando-se a $\left(\frac{1}{n}\right)$ os dois membros:

$$\left[(1 + i_f)^{-n}\right]^{1/n} = \left[(1 - i)^n\right]^{1/n}$$

$$(1 + i_f)^{-n/n} = (1 - i)^{n/n}$$

$$\frac{1}{1 + i_f} = 1 - i$$

$$1 = (1 - i)(1 + i_f)$$

$$1 = 1 + i_f - i - ii_f$$

$$\boxed{i_f = \frac{i}{1 - i}}$$

Logo, a *taxa efetiva* cobrada na operação de desconto comercial composto depende apenas da *taxa nominal* utilizada.

*Exemplo:* Um título no valor de Cr$ 10.000,00 foi saldado 6 meses antes de vencer. O pagador obteve uma taxa de desconto comercial (composta) de 2% a.m. Qual a taxa efetiva?

*Resolução:*

$$i_f = \frac{i}{1 - i}$$

$$i_f = \frac{0{,}02}{1 - 0{,}02} = \frac{0{,}02}{0{,}98}$$



$$i_f = 0{,}020408$$

$$i_f \cong 0{,}02041 \text{ a.m.} \quad \text{ou} \quad i_f \cong 2{,}041\% \text{ a.m.}$$

### 2.2. Desconto bancário

Do mesmo modo que foi feito em juros simples, é possível obter um desconto bancário composto. Basta que se acrescente a taxa de despesas do banco à taxa de desconto comercial composto adotada.

## 3. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Um título no valor nominal de Cr$ 2.000,00 foi descontado num estabelecimento financeiro onde é adotado o desconto comercial composto. Sabendo-se que a taxa de juros considerada foi de 1% a.m. e que a antecipação foi de 2 meses, qual foi o valor do desconto?

   *Resolução:*

   $N = 2.000$

   $i = 1\%$ a.m.

   $n = 2$ meses

   $d_c = ?$

   A fórmula a ser aplicada é:

   $$d_c = N[1 - (1 - 1)^n]$$

   $$d_c = 2.000[1 - (1 - 0{,}01)^2]$$

   $$d_c = 2.000[1 - (0{,}99)^2]$$

   $$d_c = 2.000\,(0{,}0199)$$

   $$d_c = \text{Cr\$ } 39{,}80$$

2. Qual é o valor descontado de um título com vencimento para 6 meses, cujo valor nominal é de Cr$ 4.500,00, se a taxa de desconto comercial for de 2% a.m.?

   *Resolução:*

   $N = 4.500$

   $i = 2\%$ a.m.

   $n = 6$ meses

   $V_c = ?$

Temos que:

$V_c = N(1 - i)^n$

$V_c = 4.500(1 - 0{,}02)^6$

$V_c = 4.500(0{,}98)^6$

$V_c = 4.500(0{,}885842)$

$V_c = \text{Cr\$ } 3.986{,}29$

3. O desconto comercial de um compromisso com vencimento para 4 meses é de Cr$ 2.102,63. Qual é a taxa de desconto comercial adotada, se o valor de resgate for de Cr$ 10.397,37?

*Resolução:*

$V_c = 10.397{,}37$

$d_c = 2.102{,}63$

$n = 4$ meses

$i = ?$

$N = V_c + d_c$

$N = 10.397{,}37 + 2.102{,}63 = 12.500{,}00$

$V_c = N(1 - i)^n$

$10.397{,}37 = 12.500(1 - i)^4$

$\frac{10.397{,}37}{12.500} = (1 - i)^4$

$0{,}831790 = (1 - i)^4$

$(0{,}831790)^{1/4} = (1 - i)$

$\frac{1}{4} \log 0{,}831790 = \log(1 - i)$

$-0{,}019997 = \log(1 - i)$

$0{,}955000 = 1 - i$

$\therefore\ i = 0{,}045$ ou $i = 4{,}5\%$ a.m.

4. O valor líquido recebido em uma operação de desconto comercial foi de Cr$ 2.477,26. Sabendo-se que o valor no vencimento seria de Cr$ 2.800,00 e que a taxa de juros adotada foi de 4% a.m., qual foi o prazo de antecipação?

*Resolução:*

$N = 2.800$



$V_c = 2.477{,}26$

$i = 4\%$ a.m.

$n = ?$

$V_c = N(1 - i)^n$

$2.477{,}26 = 2.800(1 - 0{,}04)^n$

$\frac{2.477{,}26}{2.800} = (0{,}96)^n$

$0{,}884736 = (0{,}96)^n$

Tomando os logaritmos:

$\log 0{,}884736 = n \log 0{,}96$

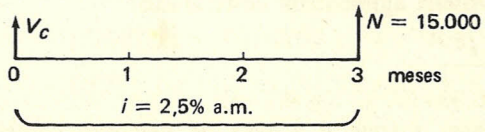
$-0{,}053186 = n(-0{,}017729)$

$n = \frac{-0{,}053186}{-0{,}017729}$

$\therefore\ n \cong 3$ meses

5. Um título no valor de Cr$ 15.000,00, em seu vencimento, foi resgatado com 3 meses de antecedência. A financeira tem como norma aplicar o desconto comercial, sendo que neste caso adotou-se a taxa de juros de 2,5% a.m. Quanto recebeu o possuidor do título e qual foi a taxa de juros efetivamente cobrada pela financeira?

*Resolução:*




$N = 15.000$

$i = 2{,}5\%$ a.m.

$n = 3$ meses

$V_c = ?$

$V_c = N(1 - i)^n$

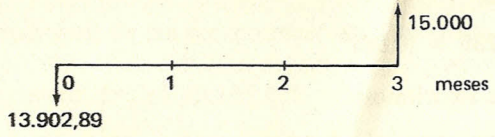
$V_c = 15.000(1 - 0{,}025)^3$

$V_c = 15.000(0{,}975)^3$

$V_c = 15.000\,(0{,}926859)$

$V_c = \text{Cr\$ } 13.902{,}89$

O possuidor do título recebeu Cr$ 13.902,89 por antecipar seu resgate em 3 meses. Quanto à operação, do ponto de vista da financeira, ela "emprestou" Cr$ 13.902,89, recebendo Cr$ 15.000,00 após 3 meses. Qual foi a taxa de juros cobrada?




$C_n = C_0(1 + i_f)^n$

$15.000 = 13.902{,}89(1 + i_f)^3$

$\frac{15.000}{13.902{,}89} = (1 + i_f)^3$

$1{,}078912 = (1 + i_f)^3$

$(1{,}078912)^{1/3} = 1 + i_f$

$1{,}025641 = 1 + i_f$

$\therefore\ i_f = 0{,}025641 \quad \text{ou} \quad i_f \cong 2{,}56\%\ \text{a.m.}$

O cálculo da taxa efetiva pode ser feito com maior simplicidade, aplicando-se a fórmula apresentada neste anexo:

$$i_f = \frac{i}{1 - i}$$

Neste problema, $i$ (que é a taxa de desconto comercial) é igual a 2,5% a.m.

$$i_f = \frac{0{,}025}{1 - 0{,}025}$$

$i_f = 0{,}025641 \quad \text{ou} \quad i_f \cong 2{,}56\%\ \text{a.m.}$

6. O desconto comercial cobrado sobre um título foi de Cr$ 2.167,29, numa antecipação de 6 meses. Sabendo-se que o valor nominal é de Cr$ 25.000,00 e que a taxa de desconto comercial empregada foi de 1,5% a.m., qual foi a taxa efetiva anual cobrada?



*Resolução:*

Temos os seguintes dados:

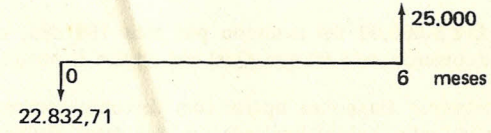
$N = 25.000$

$i = 1{,}5\%\ \text{a.m.}$

$n = 6\ \text{meses}$

$d_c = 2.167{,}29$

$V_c = 22.832{,}71$




Podemos resolver por

$25.000 = 22.832{,}71(1 + i_f)$, onde $i_f$ é taxa efetiva referente a 6 meses

$\frac{25.000}{22.832{,}71} = 1 + i_f$

$1{,}094920 = 1 + i_f$

$\therefore\ i_f = 0{,}09492 \quad \text{ou} \quad i_f \cong 9{,}49\%\ \text{a.s.}$

A taxa efetiva anual ($i_{f_1}$) será, portanto:

$(1 + i_f)^2 = (1{,}09492)^2 = 1{,}198850$

$\therefore\ i_{f_1} = 0{,}198850 \quad \text{ou} \quad i_{f_1} \cong 19{,}89\%\ \text{a.a.}$

Outro método de resolução seria encontrar a taxa efetiva mensal e depois calcular a anual:

$$i_f = \frac{0{,}015}{1 - 0{,}015}$$

$i_f = 0{,}015228 \quad \text{ou} \quad i_f \cong 1{,}52\%\ \text{a.m.}$

A taxa efetiva anual ($i_{f_1}$) será:

$(1 + i_f)^{12} = (1{,}015228)^{12} = 1{,}19885$

$\therefore\ i_{f_1} = 0{,}19885 \quad \text{ou} \quad i_{f_1} \cong 19{,}89\%\ \text{a.a.}$

## 4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Um título no valor nominal de Cr$ 12.000,00 foi descontado 3 meses antes de seu vencimento em um estabelecimento que se utiliza do desconto comercial composto. Sabendo-se que sua taxa de juros é de 2,5% a.m., qual foi o valor atual comercial recebido?

2. Uma Nota Promissória no valor de Cr$ 30.000,00 foi descontada 120 dias antes de seu vencimento, à taxa de 4% a.m. Qual foi o desconto comercial?

3. O vencimento de um compromisso de Cr$ 20.168,40 foi prorrogado por 2 meses, sendo o valor da renovação Cr$ 21.000,00. Qual é a taxa mensal de desconto comercial?

4. Um título de Cr$ 6.000,00 foi renovado por mais 180 dias, considerando-se a taxa de desconto comercial de 3,5% a.m. Qual será o valor do novo título?

5. Se um estabelecimento financeiro operar com desconto comercial, que taxa de desconto comercial anual exigirá em cada um dos casos abaixo:
   a) 1% a.m.
   b) 2% a.b.
   c) 5% a.t.
   d) 10% a.s.

   **Sugestão:** Se a taxa de desconto comercial mensal for igual a $(i_m)$, então a taxa de desconto comercial anual equivalente $(i_a)$ será obtida pela igualdade: $(1 - i_m)^{12} = (1 - i_a)$.

6. Se um banco publica que sua taxa de desconto comercial é de 29% a.a., então quais serão as taxas dos períodos seguintes:
   a) mensal
   b) trimestral
   c) quadrimestral
   d) semestral

   **Sugestão:** Ver o exercício anterior.

7. Uma Nota Promissória de Cr$ 16.000,00 foi resgatada antecipadamente por Cr$ 15.369,54. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial aplicada foi de 1% a.m., pergunta-se qual foi o período de antecipação?

8. Um estabelecimento financeiro renova um título no valor nominal de Cr$ 4.000,00 por outro de Cr$ 4.472,14. Qual é o prazo de prorrogação, uma vez que a taxa de desconto comercial deste estabelecimento é de 36% a.a.?

9. Numa operação de desconto comercial de um título, o valor atual recebido foi de Cr$ 128.860,24, sendo que o valor no vencimento seria de Cr$ 150.000,00. Uma vez que o prazo de antecipação foi de 6 meses, qual é a taxa de desconto comercial e qual a taxa efetiva nesta operação? (Apresentar as taxas anuais.)

10. Se o desconto comercial de um título for de Cr$ 2.955,00, o valor nominal de Cr$ 50.000,00 e o período de antecipação de 2 meses, quais serão as taxas anuais de desconto e efetiva?



11. O quociente entre o desconto comercial e o valor nominal é de 0,2. Sendo o prazo de antecipação 6 meses, quais são as taxas anuais de desconto e efetiva?

12. Uma pessoa aplicou Cr$ 100.000,00 à taxa de 20% a.a. por 1 ano. Entretanto, 3 meses antes da data de resgate o investidor foi a uma instituição e solicitou que esta lhe descontasse o título. O desconto comercial foi de Cr$ 6.511,00. Qual é a taxa de desconto anual? Qual a taxa efetiva anual? Que taxa anual o investidor ganhou?

### Respostas

1. Cr$ 11.122,31
2. Cr$ 4.519,60
3. 2% a.m.
4. Cr$ 7.429,98
5. a) 11,3615% a.a.
   b) 11,4158% a.a.
   c) 18,5494% a.a.
   d) 19,0000% a.a.
6. a) 2,8137% a.m.
   b) 8,2059% a.t.
   c) 10,7888% a.q.
   d) 15,7385% a.s.
7. 4 meses
8. 3 meses
9. 26,20% a.a. – taxa de desconto comercial
   35,50% a.a. – taxa efetiva
10. 30,62% a.a. – taxa de desconto comercial
    44,12% a.a. – taxa efetiva
11. 36,00% a.a. – taxa de desconto comercial
    56,25% a.a. – taxa efetiva
12. 20,00% a.a. – taxa de desconto comercial
    25,00% a.a. – taxa efetiva
    18,38% a.a. – taxa que o investidor ganhou

# 6
# Equivalência de Capitais

Este é o mesmo problema já visto em juros simples, referente à comparação de valores diferentes em datas diferentes. O que muda apenas é o regime de capitalização, que passa a ser composto.

Permanece válida, portanto, a mesma definição: dois ou mais valores nominais, referentes a datas de vencimentos determinadas, se dizem equivalentes quando seus valores, descontados para uma mesma data, à mesma taxa e em idênticas condições, produzirem valores iguais.

## 1. EQUIVALÊNCIA COM DESCONTO RACIONAL

Admitamos um conjunto de valores nominais ($C$) referidos às suas respectivas datas de vencimento ($n$):

$$\begin{array}{l} C_1 \rightarrow 1 \\ C_2 \rightarrow 2 \\ C_3 \rightarrow 3 \\ \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \\ C_n \rightarrow n \end{array}$$



Estes capitais serão equivalentes na data zero, pelo critério de desconto racional composto à taxa de juros $i$, se seus valores atuais forem iguais, ou seja:

$$V_r = \frac{C_1}{(1+i)^1} = \frac{C_2}{(1+i)^2} = \frac{C_3}{(1+i)^3} = \ldots = \frac{C_n}{(1+i)^n} \quad (27)$$

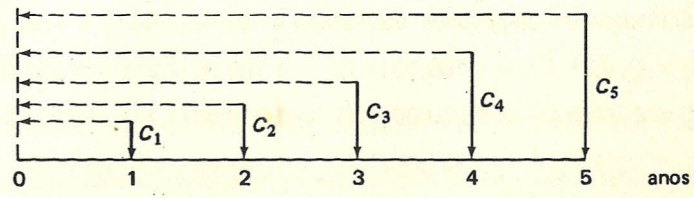
*Exemplo:* Sejam dados os valores nominais seguintes, que vencem nas datas estipuladas:

$$\begin{array}{l} C_1 = 1.100{,}00 \rightarrow 1º \text{ ano} \\ C_2 = 1.210{,}00 \rightarrow 2º \text{ ano} \\ C_3 = 1.331{,}00 \rightarrow 3º \text{ ano} \\ C_4 = 1.464{,}10 \rightarrow 4º \text{ ano} \\ C_5 = 1.610{,}51 \rightarrow 5º \text{ ano} \end{array}$$

Verificar se tais capitais são equivalentes à taxa de 10% a.a., sob o critério de desconto racional composto.

*Resolução:*

Para verificar se os capitais são equivalentes, devemos fazer sua comparação em uma data arbitrária, por exemplo, na data zero:




Para tanto, calculemos os respectivos valores atuais na data zero e à taxa de juros compostos dada:

$$V_1 = \frac{C_1}{(1+i)^1} = \frac{1.100{,}00}{(1+0{,}1)^1} = \frac{1.100{,}00}{1{,}1} = 1.000{,}00$$

$$V_2 = \frac{C_2}{(1+i)^2} = \frac{1.210{,}00}{(1+0{,}1)^2} = \frac{1.210{,}00}{1{,}21} = 1.000{,}00$$

$$V_3 = \frac{C_3}{(1+i)^3} = \frac{1.331{,}00}{(1+0{,}1)^3} = \frac{1.331{,}00}{1{,}331} = 1.000{,}00$$

$$V_4 = \frac{C_4}{(1+i)^4} = \frac{1.464,10}{(1+0,1)^4} = \frac{1.464,10}{1,4641} = 1.000,00$$

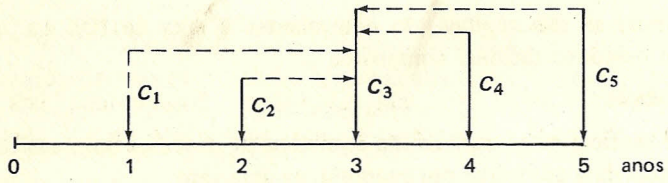
$$V_5 = \frac{C_5}{(1+i)^5} = \frac{1.610,51}{(1+0,1)^5} = \frac{1.610,51}{1,61051} = 1.000,00$$

Constatamos que:

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_5 = 1.000,00$$

Ou seja, os capitais dados são equivalentes, na data zero, sob o critério de desconto racional e à taxa de juros compostos dada. Nestas condições, uma pessoa ficará indiferente quanto aos valores, pois eles são equivalentes.

Vamos verificar se, por acaso, estes capitais dados também são equivalentes em outra data focal. Vamos escolher uma data focal arbitrária, por exemplo, a data 3:




Calculemos os respectivos *montantes e valores atuais*, à taxa dada:

$$V'_1 = C_1(1+i)^2 = 1.100,00(1,1)^2 = 1.100,00(1,21) = 1.331,00$$

$$V'_2 = C_2(1+i)^1 = 1.210,00(1,1)^1 = 1.210,00(1,1) = 1.331,00$$

$$V'_3 = C_3(1+i)^0 = 1.331,00(1,1)^0 = 1.331,00 \cdot 1 = 1.331,00$$

$$V'_4 = \frac{C_4}{(1+i)^1} = \frac{1.464,10}{(1,1)^1} = \frac{1.464,10}{1,1} = 1.331,00$$

$$V'_5 = \frac{C_5}{(1+i)^2} = \frac{1.610,51}{(1,1)^2} = \frac{1.610,51}{1,21} = 1.331,00$$

Então verificamos que:

$$V'_1 = V'_2 = V'_3 = V'_4 = V'_5 = 1.331,00$$

Ou seja, os capitais dados, que se demonstrou serem equivalentes na data focal zero, também o são na data focal 3. E, de fato, no apêndice a este capítulo demonstra-se que, uma vez constatada a equivalência para



uma certa data focal de dois ou mais capitais, sob o critério de desconto racional composto, eles serão equivalentes em qualquer data focal.

## 2. CONJUNTOS EQUIVALENTES DE CAPITAIS

Sejam dadas a taxa de juros $i$ e dois conjuntos de valores nominais com seus respectivos prazos, contados a partir da mesma data de origem:

| *1º Conjunto* | *2º Conjunto* |
|---|---|
| $C_1 \rightarrow m_1$ | $C'_1 \rightarrow m'_1$ |
| $C_2 \rightarrow m_2$ | $C'_2 \rightarrow m'_2$ |
| . . . | . . . |
| $C_n \rightarrow m_n$ | $C'_n \rightarrow m'_n$ |

Os dois conjuntos se dizem equivalentes, fixadas uma data focal e uma taxa de juros, se a soma de seus respectivos valores atuais for igual.

Este conceito se pode estender para mais de dois conjuntos de capitais e como a equivalência dos conjuntos é baseada na soma de valores atuais, o tipo de desconto deve ser explicitado.

### 2.1. Conjuntos equivalentes de capitais com desconto racional composto

Sob o critério de desconto racional composto, à taxa $i$ e na data zero, os conjuntos serão equivalentes, se:

$$\frac{C_1}{(1+i)^{m_1}} + \frac{C_2}{(1+i)^{m_2}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+i)^{m_n}} = \frac{C'_1}{(1+i)^{m'_1}} + \frac{C'_2}{(1+i)^{m'_2}} + \ldots + \frac{C'_n}{(1+i)^{m'_n}} \qquad (28)$$

Pode-se provar que dois conjuntos equivalentes, em uma dada data focal, serão equivalentes em qualquer outra data focal que se escolha.

*Exemplo:* Verificar se os conjuntos de valores nominais referidos à data zero e descontados racionalmente à taxa de juros compostos de 10% a.a. são equivalentes:

| *1º Conjunto* | *2º Conjunto* |
|---|---|
| $C_1 = 1.100,00 \rightarrow m_1 = 1$ ano | $C'_1 = 2.200,00 \rightarrow m'_1 = 1$ ano |
| $C_2 = 2.420,00 \rightarrow m_2 = 2$ anos | $C'_2 = 1.210,00 \rightarrow m'_2 = 2$ anos |
| $C_3 = 1.996,50 \rightarrow m_3 = 3$ anos | $C'_3 = 665,50 \rightarrow m'_3 = 3$ anos |
| $C_4 = 732,05 \rightarrow m_4 = 4$ anos | $C'_4 = 2.196,15 \rightarrow m'_4 = 4$ anos |

*Resolução:*

Para fazer a comparação da soma dos valores atuais à taxa dada, escolhemos a data focal zero:

a) *1º Conjunto de capitais:*

$$S_{V_1} = \frac{C_1}{(1+i)^{m_1}} + \frac{C_2}{(1+i)^{m_2}} + \frac{C_3}{(1+i)^{m_3}} + \frac{C_4}{(1+i)^{m_4}}$$

$$S_{V_1} = \frac{1.100,00}{(1,10)^1} + \frac{2.420,00}{(1,10)^2} + \frac{1.996,50}{(1,10)^3} + \frac{732,05}{(1,10)^4}$$

$$S_{V_1} = \frac{1.100,00}{1,10} + \frac{2.420,00}{1,21} + \frac{1.996,50}{1,331} + \frac{732,05}{1,4641}$$

$$S_{V_1} = 1.000,00 + 2.000,00 + 1.500,00 + 500,00$$

$$S_{V_1} = 5.000,00$$

b) *2º Conjunto de capitais:*

$$S_{V_2} = \frac{C'_1}{(1+i)^{m'_1}} + \frac{C'_2}{(1+i)^{m'_2}} + \frac{C'_3}{(1+i)^{m'_3}} + \frac{C'_4}{(1+i)^{m'_4}}$$

$$S_{V_2} = \frac{2.200,00}{(1,10)^1} + \frac{1.210,00}{(1,10)^2} + \frac{665,50}{(1,10)^3} + \frac{2.196,15}{(1,10)^4}$$

$$S_{V_2} = 2.000,00 + 1.000,00 + 500,00 + 1.500,00$$

$$S_{V_2} = 5.000,00$$

Como $S_{V_1} = S_{V_2}$, concluímos que, sob o critério de desconto racional composto, os dois conjuntos são equivalentes.

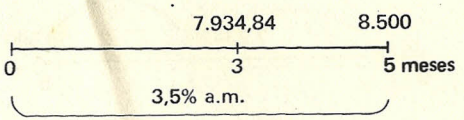


## 3. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Um título no valor nominal de Cr$ 8.500,00, com vencimento para 5 meses, é trocado por outro de Cr$ 7.934,84, com vencimento para 3 meses. Sabendo-se que a taxa de juros corrente de mercado é de 3,5% a.m., pergunta-se se a substituição foi vantajosa.

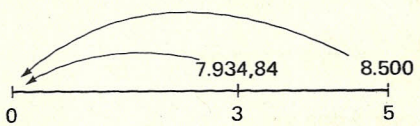
*Resolução:*

Nosso problema é comparar esses dois capitais para verificar se são equivalentes ou não. A equivalência será feita através da taxa de juros:




Como os capitais se encontram em instantes diferentes de tempo, devemos considerá-los em uma mesma data focal.

1º) *Data focal zero:*




$$V_3 = \frac{C_3}{(1+i)^3}$$

$$V_3 = \frac{7.934,84}{(1,035)^3}$$

$$V_3 = \frac{7.934,84}{1,108718} = \text{Cr\$ } 7.156,77$$

$$V_5 = \frac{C_5}{(1+i)^5}$$

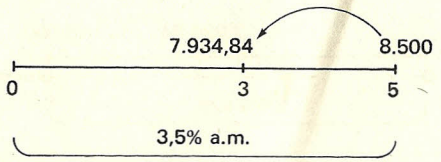
$$V_5 = \frac{8.500}{(1,035)^5}$$

$$V_5 = \frac{8.500}{1,187686} = \text{Cr\$ } 7.156,77$$

Uma vez que os valores atuais são iguais, considerando a data focal zero e a taxa de 3,5% a.m., dizemos que os dois títulos são equivalentes à taxa de 3,5% a.m. Então, não houve vantagem alguma na substituição dos títulos.

A comparação foi feita na data focal zero, mas a conclusão seria a mesma em qualquer data focal que se escolhesse. Para exemplificar vamos compará-los nas datas focais 3 e 5.

2º) *Data focal três:*



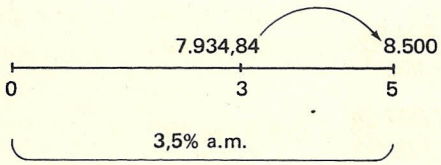

$$V'_3 = \frac{C_5}{(1 + i)^2}$$

$$V'_3 = \frac{8.500}{(1{,}035)^2}$$

$$V'_3 = \frac{8.500}{1{,}071225} = \text{Cr\$ } 7.934{,}84$$

$$V'_3 = C_3 = \text{Cr\$ } 7.934{,}84$$

3º) *Data focal cinco:*




$$V'_5 = C_3(1 + i)^2$$

$$V'_5 = 7.934{,}84\,(1{,}035)^2$$

$$V'_5 = 7.934{,}84\,(1{,}071225) = \text{Cr\$ } 8.500{,}00$$

$$V'_5 = C_5 = \text{Cr\$ } 8.500{,}00$$

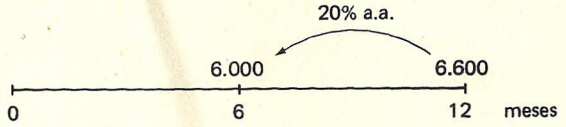
**Sugestão:** Comparar os dois capitais na data focal dois ou quatro.



2. João irá receber Cr$ 6.600,00 dentro de um ano, como parte de seus direitos na venda de um barco. Contudo, necessitando de dinheiro, transfere seus direitos a um amigo que os compra, entregando-lhe uma Nota Promissória no valor de Cr$ 6.000,00, com vencimento para 6 meses. João fez bom negócio, se a taxa de mercado for de 20% a.a.?

*Resolução:*

A análise deve ser feita comparando-se os dois capitais na mesma data focal:




$$V_6 = \frac{C_{12}}{(1 + i)^6}$$

$$V_6 = \frac{6.600}{[(1{,}20)^{1/12}]^6} = \frac{6.600}{(1{,}20)^{1/2}}$$

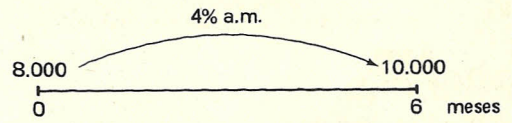
$$V_6 = \frac{6.600}{1{,}095445} = \text{Cr\$ } 6.024{,}95$$

Como Cr$ 6.000,00 (valor que João irá receber em 6 meses) é menor que Cr$ 6.024,95, conclui-se que, levando em conta a taxa de mercado, ele não fez bom negócio.

Examinando-se por outro enfoque, vemos que, se ele aplicar Cr$ 6.000,00 a 20% a.a., não terá Cr$ 6.600,00 após 6 meses.

3. Considerando-se a taxa de juros de 4% a.m., será que Cr$ 8.000,00 hoje equivalem a Cr$ 10.000,00 em 6 meses?

*Resolução:*



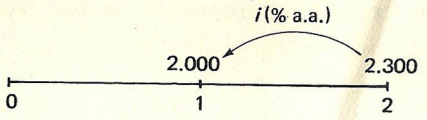

$$V'_6 = C_0(1 + i)^6$$

$$V'_6 = 8.000\,(1{,}04)^6$$

$$V'_6 = 8.000\,(1{,}265319) = \text{Cr\$ } 10.122{,}55$$

Portanto, à taxa de 4% a.m., Cr$ 8.000,00 hoje é melhor que Cr$ 10.000,00 a 6 meses.

4. A que taxa de juros anuais Cr$ 2.000,00 a 1 ano equivalem a Cr$ 2.300,00 a 2 anos?
*Resolução:*

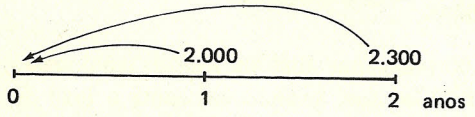



$$2.000 = \frac{2.300}{(1 + i)^1}$$

$$1 + i = \frac{2.300}{2.000} = 1,15$$

$$\therefore\ i = 0,15 \quad \text{ou} \quad i = 15\%\ \text{a.a.}$$

Caso a comparação tivesse sido feita na data focal zero, teríamos:




$$V_1 = \frac{2.000}{(1 + i)^1}$$

$$V_2 = \frac{2.300}{(1 + i)^2}$$

Para que sejam equivalentes, é necessário que $V_1 = V_2$, então:

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{2.000}{(1 + i)^1} = \frac{2.300}{(1 + i)^2}$$

$$\frac{(1 + i)^2}{(1 + i)^1} = \frac{2.300}{2.000}$$

$$1 + i = 1,15$$

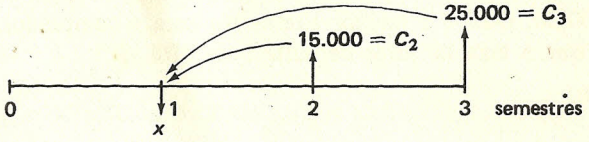
$$\therefore\ i = 0,15 \quad \text{ou} \quad i = 15\%\ \text{a.a.}$$



5. Uma financeira oferece a um cliente dois títulos, vencendo o primeiro em 1 ano, no valor de Cr$ 15.000,00, e o segundo em 1 ano e meio, no valor de Cr$ 25.000,00. O cliente aceita a oferta assinando uma Nota Promissória, com vencimento para 6 meses. Sabendo-se que a taxa de juros considerada na operação foi de 30% a.a., qual é o valor da Nota Promissória em seu vencimento?

*Resolução:*

Graficamente temos o seguinte problema:




$$x = \frac{C_2}{(1 + i)^1} + \frac{C_3}{(1 + i)^2}, \text{ onde } i = \text{taxa de juros semestral}$$

$$x = \frac{15.000}{[(1,30)^{1/2}]^1} + \frac{25.000}{[(1,30)^{1/2}]^2}$$

$$x = \frac{15.000}{1,140175} + \frac{25.000}{1,30}$$

$$x = 13.155,87 + 19.230,77$$

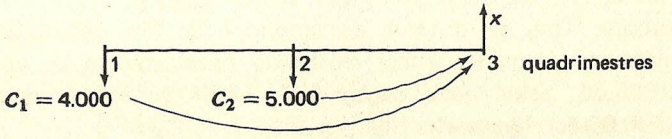
$$x = \text{Cr\$ } 32.386,64$$

Considerando a taxa de juros de 30% a.a., um título com o valor de Cr$ 32.386,64 para 6 meses equivale à soma de Cr$ 15.000,00 para 1 ano com Cr$ 25.000,00 para 1 ano e meio.

**Sugestão:** Resolver o problema utilizando a data focal zero.

6. Uma dona de casa, prevendo suas despesas com as festas de fim de ano, resolve depositar Cr$ 4.000,00 em 30/03/1976 e Cr$ 5.000,00 em 30/07/1976, em um banco que paga 8% ao quadrimestre. Quanto possuirá a depositante em 30/11/1976?

*Resolução:*



$$x = C_1(1 + i)^2 + C_2(1 + i)^1$$

$$x = 4.000(1,08)^2 + 5.000(1,08)^1$$

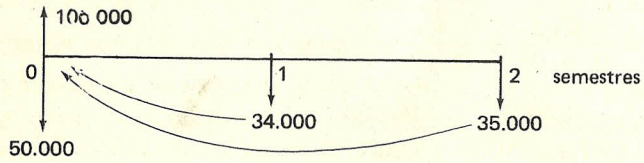
$$x = 4.000(1,1664) + 5.000(1,08)$$

$$x = 4.665,60 + 5.400,00$$

$$x = \text{Cr\$ } 10.065,60$$

7. Um terreno é posto a venda por Cr$ 100.000,00 a vista, ou, caso o comprador opte por financiamento, por Cr$ 50.000,00 no ato mais duas parcelas semestrais, sendo a primeira de Cr$ 34.000,00 e a segunda de Cr$ 35.000,00. Qual é a melhor alternativa para o comprador, se considerarmos que a taxa de juros corrente é de 50% a.a.?

*Resolução:*




Comparando na data focal zero, temos:

$$Sv = 50.000 + \frac{34.000}{[(1,50)^{1/2}]^1} + \frac{35.000}{[(1,50)^{1/2}]^2}$$

$$Sv = 50.000 + \frac{34.000}{1,224745} + \frac{35.000}{1,50}$$

$$Sv = 50.000 + 27.760,88 + 23.333,33$$

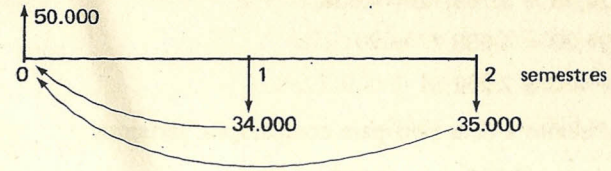
$$Sv = \text{Cr\$ } 101.094,21$$

A melhor alternativa para o comprador é o pagamento a vista, pois possui menor valor atual (Cr$ 100.000,00). A outra hipótese corresponderia à venda do terreno por Cr$ 101.094,21.

Outro enfoque que podemos dar ao mesmo problema é o seguinte:

Se a pessoa vai comprar o terreno a prazo, deverá despender Cr$ 50.000,00 como entrada. Ora, se o valor do terreno é de Cr$ 100.000,00 a vista, então o comprador estará recebendo financiamento de apenas Cr$ 50.000,00, pelos quais pagará Cr$ 34.000,00 em 6 meses e Cr$ 35.000,00 em 12 meses:






$$Sv_1 = \frac{34.000}{[(1,50)^{1/2}]^1} + \frac{35.000}{[(1,50)^{1/2}]^2}$$

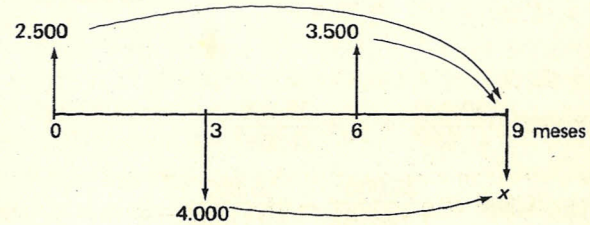
$$Sv_1 = \frac{34.000}{1,224745} + \frac{35.000}{1,50}$$

$$Sv_1 = 27.760,88 + 23.333,33 = \text{Cr\$ } 51.094,21$$

Sendo Cr$ 51.094,21 > Cr$ 50.000,00, chegamos à mesma conclusão do enfoque anterior.

8. Certa pessoa contraiu uma dívida, comprometendo-se a saldá-la em dois pagamentos: o primeiro de Cr$ 2.500,00 e o segundo, 6 meses após o primeiro, de Cr$ 3.500,00. Contudo, no vencimento da primeira parcela, não dispondo de recursos, o devedor propôs adiamento de sua dívida. O esquema apresentado foi: pagamento de Cr$ 4.000,00 daí a 3 meses e o saldo em 9 meses. Se a taxa de juros considerada foi de 2,5% a.m., qual é o saldo restante?

*Resolução:*




$$i = 2,5\% \text{ a.m.}$$

O problema é calcular $x$, tal que os conjuntos de capitais sejam equivalentes:

$$2.500(1,025)^9 + 3.500(1,025)^3 = 4.000(1,025)^6 + x$$

$$2.500(1,248863) + 3.500(1,076891) = 4.000(1,159693) + x$$

$$3.122,16 + 3.769,12 = 4.638,77 + x$$

$$6.891,28 = 4.638,77 + x$$

$$\therefore\ x = \text{Cr\$ } 2.252,51$$

Se escolhêssemos a *data zero* para comparação, teríamos:

$$2.500 + \frac{3.500}{(1,025)^6} = \frac{4.000}{(1,025)^3} + \frac{x}{(1,025)^9}$$

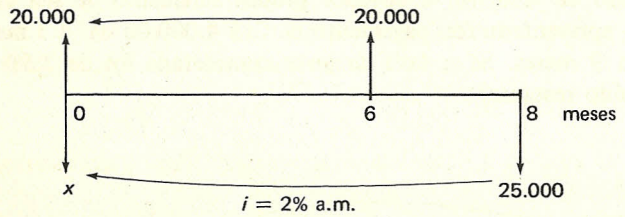
$$2.500 + 3.018,04 = 3.714,40 + \frac{x}{1,248863}$$

$$1.803,64 = \frac{x}{1,248863}$$

$$\therefore\ x = 1.803,64(1,248863) = \text{Cr\$ } 2.252,50$$

9. Um carro está a venda por Cr$ 20.000,00 de entrada e Cr$ 20.000,00 após 6 meses. Um comprador propõe pagar Cr$ 25.000,00 como segunda parcela, o que só será feito, entretanto, após 8 meses. Neste caso, quanto deverá dar de entrada, se a taxa de juros de mercado for de 2% a.m.?

*Resolução:*




Tem-se:

$$20.000 + \frac{20.000}{(1,02)^6} = x + \frac{25.000}{(1,02)^8}$$

$$x = 20.000 + \frac{20.000}{1,126162} - \frac{25.000}{1,171659}$$

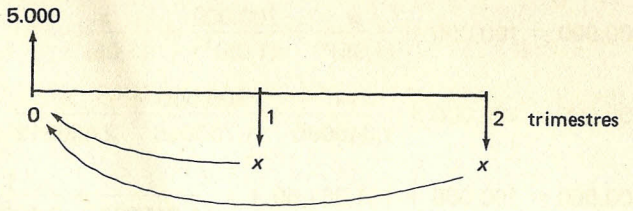
$$x = 20.000 + 17.759,43 - 21.337,27$$

$$x = \text{Cr\$ } 16.422,16$$

10. Um conjunto de dormitório é vendido em uma loja por Cr$ 5.000,00 a vista ou a prazo em dois pagamentos trimestrais iguais, não se exigindo entrada. Qual é o valor dos pagamentos, se a taxa de juros considerada for de 8% a.t.?



*Resolução:*




$i = 8\%$ a.t.

$$5.000 = \frac{x}{(1,08)^1} + \frac{x}{(1,08)^2}$$

pondo-se $x$ em evidência, temos:

$$5.000 = x\left[\frac{1}{(1,08)} + \frac{1}{(1,08)^2}\right]$$

$$5.000 = x\left[\frac{1}{1,08} + \frac{1}{1,1664}\right]$$

$$5.000 = x(0,925926 + 0,857339)$$

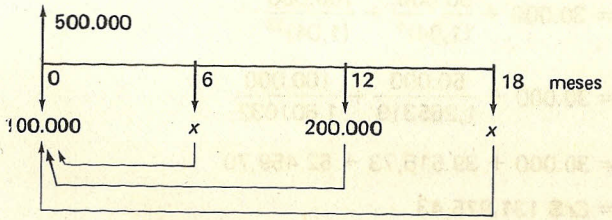
$$5.000 = x(1,783265)$$

$$\therefore\ x = \frac{5.000}{1,783265} \cong \text{Cr\$ } 2.803,85$$

Portanto, na compra a prazo, deverão ser pagas duas parcelas trimestrais de Cr$ 2.803,85.

11. Um sítio é posto a venda em uma imobiliária por Cr$ 500.000,00 a vista. Como alternativa, a imobiliária propõe: entrada de Cr$ 100.000,00, uma parcela de Cr$ 200.000,00 para 1 ano e dois pagamentos iguais, vencendo o primeiro em 6 meses e o segundo em 1 ano e meio. Qual é o valor destes pagamentos, se a taxa de juros adotada for de 5% a.m.?

*Resolução:*



$i = 5\%$ a.m.

$$500.000 = 100.000 + \frac{x}{(1,05)^6} + \frac{200.000}{(1,05)^{12}} + \frac{x}{(1,05)^{18}}$$

$$500.000 = 100.000 + \frac{x}{1,340096} + \frac{200.000}{1,795856} + \frac{x}{2,406619}$$

$$500.000 = 100.000 + 111.367,50 + x\left(\frac{1}{1,340096} + \frac{1}{2,406619}\right)$$

$$288.632,50 = x(0,746215 + 0,415521)$$

$$\therefore\ x = \frac{288.632,50}{1,161736} = \text{Cr\$ } 248.449,30$$

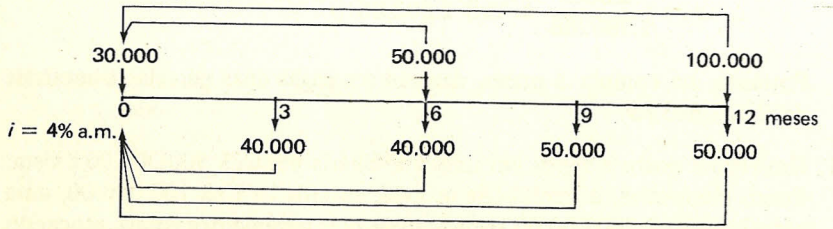
12. Na venda de um barco, a Loja Náutica S.A. oferece duas opções a seus clientes:

1ª) Cr$ 30.000,00 de entrada mais duas parcelas semestrais, sendo a primeira de Cr$ 50.000,00 e a segunda de Cr$ 100.000,00.

2ª) sem entrada, sendo o pagamento efetuado em quatro parcelas trimestrais: Cr$ 40.000,00 nas duas primeiras, e Cr$ 50.000,00 nas duas últimas.

Qual é a melhor alternativa para o comprador, se considerarmos a taxa de juros de mercado de 4% a.m.?

*Resolução:*




Calculando o valor atual, à taxa de 4% a.m., na data focal zero, teremos em cada alternativa:

a) *Alternativa I:*

$$Sv_1 = 30.000 + \frac{50.000}{(1,04)^6} + \frac{100.000}{(1,04)^{12}}$$

$$Sv_1 = 30.000 + \frac{50.000}{1,265319} + \frac{100.000}{1,601032}$$

$$Sv_1 = 30.000 + 39.515,73 + 62.459,70$$

$$Sv_1 = \text{Cr\$ } 131.975,43$$



b) *Alternativa II:*

$$Sv_2 = \frac{40.000}{(1,04)^3} + \frac{40.000}{(1,04)^6} + \frac{50.000}{(1,04)^9} + \frac{50.000}{(1,04)^{12}}$$

$$Sv_2 = \frac{40.000}{1,124864} + \frac{40.000}{1,265319} + \frac{50.000}{1,423312} + \frac{50.000}{1,601032}$$

$$Sv_2 = 35.559,85 + 31.612,58 + 35.129,33 + 31.229,86$$

$$Sv_2 = \text{Cr\$ } 133.531,62$$

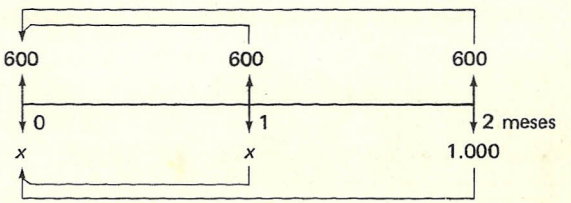
Como a Alternativa I possui menor valor atual, conclui-se que esta é a melhor para o comprador.

13. Uma "butique" vende um vestido por Cr$ 1.800,00, podendo este valor ser pago em três prestações mensais iguais, sendo a primeira paga na compra. Uma cliente propõe o pagamento de Cr$ 1.000,00 como terceira parcela. De quanto devem ser as duas primeiras se forem iguais e a taxa de juros adotada pela "butique" for de 8% a.m.?

*Resolução:*

O vestido pode ser pago em três parcelas iguais, então:

$$\frac{1.800}{3} = \text{Cr\$ } 600,00$$




Considerando a taxa de juros de 8% a.m., à loja será indiferente se:

$$600 + \frac{600}{(1,08)} + \frac{600}{(1,08)^2} = x + \frac{x}{(1,08)} + \frac{1.000}{(1,08)^2}$$

$$600 + \frac{600}{1,08} + \frac{600}{1,1664} = x + \frac{x}{1,08} + \frac{1.000}{1,1664}$$

$$600 + 555,56 + 514,40 = x + \frac{x}{1,08} + 857,34$$

$$812,62 = x\left(1 + \frac{1}{1,08}\right)$$

$$812{,}62 = x(1 + 0{,}925926)$$

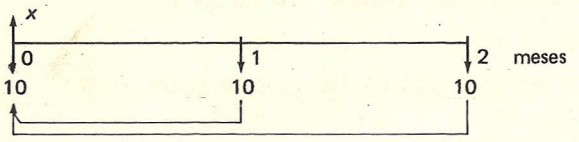
$$x = \frac{812{,}62}{1{,}925926} = \text{Cr\$ } 421{,}94$$

14. Uma loja tem como norma facilitar os pagamentos, proporcionando a seus clientes a possibilidade de pagar em três meses sem acréscimo. Neste caso o preço a vista é dividido por 3 e a primeira parcela é dada como entrada. Qual é o desconto sobre o preço a vista que a loja pode conceder, se sua taxa for de 7,5% a.m.?

*Resolução:*

Para simplificar o raciocínio, vamos supor uma mercadoria no valor de Cr$ 30,00. Então a parcela será de:

$$\frac{30}{3} = \text{Cr\$ } 10{,}00$$




$x$ = preço com desconto (valor atual das parcelas)

$$x = 10 + \frac{10}{(1{,}075)} + \frac{10}{(1{,}075)^2}$$

$$x = 10 + \frac{10}{1{,}075} + \frac{10}{1{,}155625}$$

$$x = \text{Cr\$ } 27{,}96$$

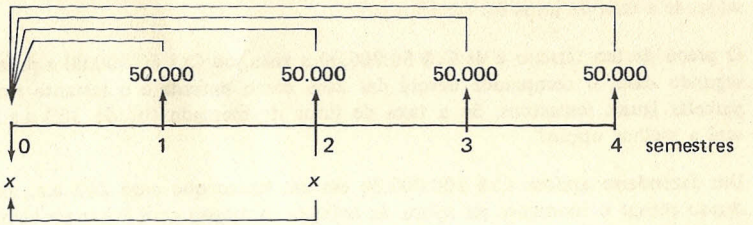
Isto significa que para a loja é indiferente vender a mercadoria por Cr$ 27,96 a vista ou pelo esquema de três parcelas. O desconto máximo concedido sobre o preço a vista pela loja será de:

$$\text{desconto} = \frac{30 - 27{,}96}{30} = 0{,}068 \quad \text{ou} \quad 6{,}8\%$$

15. Um imóvel está a venda por 4 parcelas semestrais de Cr$ 50.000,00, vencendo a primeira em 6 meses. Um financista propõe a compra deste imóvel, pagando-o em duas parcelas iguais, uma no ato da compra e outra após 1 ano. Qual é o valor das parcelas, se a taxa de juros ajustada for de 20% a.s.?



*Resolução:*




$i = 20\%$ a.s.

$$x + \frac{x}{(1{,}20)^2} = \frac{50.000}{(1{,}20)} + \frac{50.000}{(1{,}20)^2} + \frac{50.000}{(1{,}20)^3} + \frac{50.000}{(1{,}20)^4}$$

pondo-se $x$ e 50.000 em evidência, temos:

$$x\left[1 + \frac{1}{1{,}44}\right] = 50.000\left[\frac{1}{1{,}20} + \frac{1}{1{,}44} + \frac{1}{1{,}728} + \frac{1}{2{,}0736}\right]$$

$$x(1 + 0{,}694444) = 50.000(0{,}833333 + 0{,}694444 + 0{,}578704 + 0{,}482253)$$

$$x(1{,}694444) = 50.000(2{,}588734)$$

$$x = \frac{129.436{,}70}{1{,}694444}$$

$$x = \text{Cr\$ } 76.388{,}89$$

## 4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Uma pessoa tem condições de aplicar seu dinheiro a 3,5% a.m. no mercado de capitais. Se um amigo lhe pedir emprestado Cr$ 12.000,00 por um ano, quanto deverá devolver para que sua aplicação seja equivalente neste período?

2. Certo aplicador possui em seus haveres dois títulos, de Cr$ 4.000,00 e Cr$ 5.000,00, com vencimentos para 180 e 360 dias. Pretendendo comprar uma máquina de calcular, procura descontar os títulos em um banco. O gerente, que é seu amigo, avisa-lhe que a taxa nominal é de 30% a.a., contudo a capitalização é mensal. O cliente aceita as condições do banco, pois o valor a receber é igual ao preço da máquina. Qual é o seu valor?

3. Para viajar daqui a um ano, Maria vende seu carro hoje e seu apartamento a 6 meses, aplicando o dinheiro em uma instituição que paga 40% a.a. O carro será vendido por Cr$ 30.000,00 e o apartamento por Cr$ 250.000,00, sendo que na viagem ela pretende gastar Cr$ 300.000,00. Que saldo poderá deixar aplicado?

4. João comprou uma enciclopédia, sem dar nada de entrada sob condição de pagá-la em 4 parcelas quadrimestrais de Cr$ 1.000,00. Como opção, o gerente da livraria

lhe propôs uma entrada de Cr$ 1.500,00 e o saldo para 1 ano. De quanto será este saldo, se a taxa de juros for de 3% a.m.?

5. O preço de um terreno é de Cr$ 50.000,00 a vista, ou Cr$ 60.000,00 a prazo. No segundo caso, o comprador deverá dar 20% como entrada e o restante em duas parcelas iguais semestrais. Se a taxa de juros de mercado for de 30% a.a., qual será a melhor opção?

6. Um fazendeiro aplicou Cr$ 100.000,00 em um banco que paga 25% a.a., pretendendo retirar o montante na época da colheita (6 meses) para evitar problemas de capital de giro. Entretanto, decorridos 3 meses ele necessitou de dinheiro, retirando então Cr$ 30.000,00. Que saldo poderá retirar na época da colheita?

7. Uma pessoa deve Cr$ 2.000,00 hoje e Cr$ 5.000,00 para 1 ano. Propõe a seu credor refinanciamento de sua dívida, comprometendo-se a liquidá-la em 3 parcelas semestrais iguais, vencendo a primeira em 6 meses. De quanto serão as parcelas, se a taxa contratada for de 20% a.a.?

8. O Sr. Carlos vendeu um carro para um amigo seu, pelo preço de Cr$ 50.000,00. Quanto às condições de pagamento, ele disse que o amigo pagar-lhe-ia na medida do possível, sendo os juros de 40% a.a. Os pagamentos efetuados foram: Cr$ 5.000,00 (3º mês), Cr$ 10.000,00 (5º mês), Cr$ 20.000,00 (6º mês). No fim do 12º mês o comprador diz querer saldar seu débito total. Qual é o valor do acerto final?

9. Uma dívida de Cr$ 150.000,00 para 12 meses e de Cr$ 300.000,00 para 24 meses foi transformada em 4 parcelas iguais semestrais, vencendo a primeira a 6 meses. Qual é o valor das parcelas se considerarmos a taxa de 25% a.a.?

10. Se uma instituição financeira paga 20% a.a., quanto deverei depositar trimestralmente para, ao fim do 4º depósito, possuir Cr$ 10.000,00?

11. O preço a vista de uma casa é de Cr$ 500.000,00. O vendedor facilita a transação, propondo o seguinte esquema: Cr$ 100.000,00 como entrada, duas parcelas semestrais de Cr$ 200.000,00 e um pagamento final de Cr$ 157.010,59. Se a taxa contratada for de 3% a.m., quando será o último pagamento?

12. Uma loja vende um gravador por Cr$ 600,00 a vista, ou a prazo em 3 pagamentos mensais de Cr$ 200,00 e uma pequena entrada. A taxa de juros adotada pela loja é de 7% a.m.; portanto, de quanto deve ser a entrada?

**Respostas**

1. Cr$ 18.132,82
2. Cr$ 7.166,97
3. Cr$ 37.803,99
4. Cr$ 2.142,12
5. Melhor opção é comprar a vista, pois possui menor valor atual. A taxa do financiamento é de 37,11% a.a.
6. Cr$ 80.082,26
7. Cr$ 2.459,85
8. Cr$ 27.731,80
9. Cr$ 102.296,12
10. Cr$ 2.331,76
11. 6 meses após a 2ª parcela semestral, ou seja, a 1 ano e meio da entrada.
12. Cr$ 75,14



# Apêndice

## 1. EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS EM DATAS QUAISQUER SOB O CRITÉRIO DE DESCONTO RACIONAL COMPOSTO

Dois ou mais valores nominais, equivalentes sob o critério do desconto racional composto em uma certa data focal, são equivalentes em qualquer data focal.

*Demonstração:*

Para facilitar, admitamos apenas dois valores nominais com suas respectivas datas de vencimento:

$C_2 \rightarrow 2$

$C_n \rightarrow n$

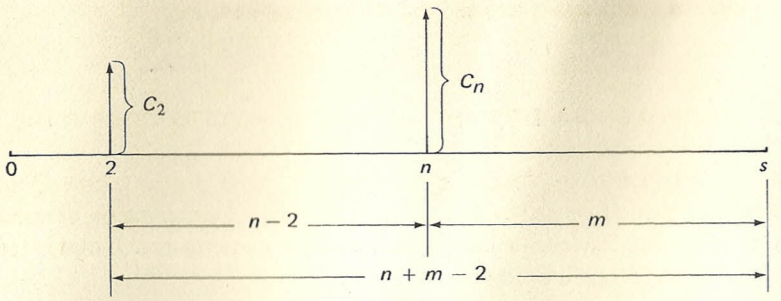
Admitamos que estes dois valores sejam equivalentes na data zero, à taxa $i$:

$$\frac{C_2}{(1+i)^2} = \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad \text{(I)}$$

Seja $s$ uma data focal arbitrária tal que:

$s = m + n$

Ou seja, os intervalos são:




Calculando-se os montantes na data focal $s$, temos:

a) o valor nominal $C_2$ será capitalizado por um prazo igual a $(n + m - 2)$, como pode ser visto no gráfico. Logo, o montante é dado por:

$$C_s = C_2(1 + i)^{(n+m-2)} \qquad \text{(II)}$$

b) o valor nominal $C_n$ será capitalizado por $m$ períodos e o montante correspondente será:

$$C'_s = C_n(1 + i)^m \qquad \text{(III)}$$

Consideremos agora a expressão (I), que é a hipótese inicial:

$$\frac{C_2}{(1 + i)^2} = \frac{C_n}{(1 + i)^n}$$

$$C_2 = C_n(1 + i)^{-n}(1 + i)^2$$

$$C_2 = C_n(1 + i)^{(2-n)}$$

Substituindo-se esse valor de $C_2$ na expressão (II), temos:

$$C_s = \left[C_n(1 + i)^{(2-n)}\right](1 + i)^{(n+m-2)}$$

$$C_s = C_n(1 + i)^{(2-n+n+m-2)}$$

$$\therefore\ C_s = C_n(1 + i)^m$$

Como este valor é igual ao segundo membro da expressão (III), concluímos que:

$$C_s = C'_s$$



Logo, como $C_s$ é o montante quando se capitaliza $C_2$ e como $C'_s$ é o montante quando se capitaliza $C_n$, ambos à mesma taxa, concluímos que os citados capitais também são equivalentes na data $s$.

## 2. EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS COM DESCONTO COMERCIAL

Optamos por colocar em apêndice esta parte porque ela não interfere com a seqüência do texto. Por outro lado, como já observamos, as operações que envolvem desconto comercial composto têm interesse meramente teórico, uma vez que não são utilizadas na prática.

Seja o conjunto de valores nominais:

| | | |
|---|---|---|
| $C_1$ | → | 1 |
| $C_2$ | → | 2 |
| $C_3$ | → | 3 |
| . | | . |
| . | | . |
| . | | . |
| $C_n$ | → | $n$ |

onde foram especificadas as respectivas datas de vencimento.

Este conjunto de valores nominais será equivalente na data zero, sob o critério de desconto comercial composto à taxa de desconto $i$, se:

$$V_c = C_1(1-i)^1 = C_2(1-i)^2 = C_3(1-i)^3 = \ldots = C_n(1-i)^n$$

uma vez que estes são os valores descontados comerciais compostos à taxa $i$, para a data zero.

*Exemplo:* sejam os valores nominais seguintes, que vencem nas datas estipuladas:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C_1$ | = 1.111,11 | → | 1º ano |
| $C_2$ | = 1.234,57 | → | 2º ano |
| $C_3$ | = 1.371,74 | → | 3º ano |
| $C_4$ | = 1.524,16 | → | 4º ano |
| $C_5$ | = 1.693,51 | → | 5º ano |

Admitindo-se uma taxa de desconto de 10% a.a., um regime de desconto comercial composto e a data focal zero, verificar se os capitais são equivalentes.

*Resolução:*

Calculemos os respectivos valores descontados comerciais:

$$V_1 = C_1(1 - i)^1 = 1.111,11(1 - 0,1)^1 \cong 1.000,00$$

$$V_2 = C_2(1 - i)^2 = 1.234,57(1 - 0,1)^2 \cong 1.000,00$$

$$V_3 = C_3(1 - i)^3 = 1.371,74(1 - 0,1)^3 \cong 1.000,00$$

$$V_4 = C_4(1 - i)^4 = 1.524,16(1 - 0,1)^4 \cong 1.000,00$$

$$V_5 = C_5(1 - i)^5 = 1.693,51(1 - 0,1)^5 \cong 1.000,00$$

Ou seja:

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_5 = 1.000,00$$

Nestas condições, os citados valores nominais são equivalentes sob o critério de desconto comercial composto e na data focal zero.

O leitor deve observar o seguinte:

Sendo:

$$V_c = N(1 - i)^n$$

onde:

$V_c$ = valor descontado comercial composto

$N$ = valor nominal

$i$ = taxa de juros

$n$ = número de períodos de antecipação no desconto

E sendo a *taxa efetiva* dada por:

$$i_f = \frac{i}{1 - i}$$

temos que o montante, *nas mesmas condições do desconto comercial composto*, é dado por:

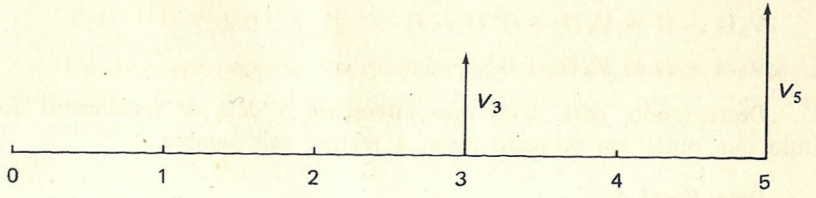
$$N = \frac{V_c}{(1 - i)^n} = V_c\left(\frac{1}{1 - i}\right)^n = V_c\left(1 + \frac{i}{1 - i}\right)^n$$

$$\therefore N = V_c(1 + i_f)^n$$



Nestas condições, se os capitais forem capitalizados à *taxa de juros efetiva*, dois ou mais capitais que sejam equivalentes em uma dada data serão equivalentes também em qualquer outra data.

*Exemplo:* são dados os valores nominais seguintes, referidos às suas respectivas datas:




onde:

$$V_3 = 1.371,74$$

$$V_5 = 1.693,51$$

Sendo dada a taxa de juros de 10% a.a. e o critério de desconto comercial composto, pede-se:

- verificar que os dois capitais são equivalentes na data focal 3;
- constatar que esta equivalência também ocorre para as datas focais 2 e 4.

*Resolução:*

*Data Focal 3:*

Temos:

$$V_5 = (1 - i)^2 = 1.693,51(0,9)^2 = 1.371,74$$

Logo:

$$V_3 = V_5(1 - i)^2$$

Portanto, os dois capitais são equivalentes, sob o critério do desconto comercial composto, na data focal 3.

*Data Focal 2:*

Temos:

$$V_3(1 - i) = 1.371,74(0,9) \cong 1.234,57$$

$$V_5(1 - i)^3 = 1.693,51(0,9)^3 \cong 1.234,57$$

Logo:

$$V_3(1 - i) = V_5(1 - i)^3$$

**Nota:** o leitor deve observar que já tínhamos os dois capitais equivalentes na data focal 3:

$$V_3 = V_5(1 - i)^2$$

Multiplicando-se os dois membros por $(1 - i)$ e desde que $i$ seja diferente de 1:

$$V_3(1 - i) = V_5(1 - i)^2(1 - i)$$

$$V_3(1 - i) = V_5(1 - i)^3$$

Deste modo, para datas que *antecedem* a data de vencimento do título que vence em primeiro lugar, a relação vale sempre.

*Data Focal 4:*

Temos:

$$\frac{V_3}{(1-i)} = \frac{1.371,74}{0,9} = 1.371,74 \times 1,1111 \cong 1.524,16$$

Observe que a capitalização está sendo feita à *taxa efetiva* de 11,11% a.a.

Temos ainda:

$$V_5(1 - i) = 1.693,51\,(0,9) \cong 1.524,16$$

Logo:

$$\frac{V_3}{(1 - i)} = V_5(1 - i)$$

E constatamos que os dois capitais também são equivalentes na data focal 4.

**Nota:** de modo análogo, partindo-se do fato de que os dois capitais são equivalentes na data focal 3:

$$V_3 = V_5(1 - i)^2$$

Dividindo-se os dois membros por $(1 - i)$, temos:

$$\frac{V_3}{(1 - i)} = \frac{V_5(1 - i)^2}{(1 - i)}$$

$$\therefore \quad \frac{V_3}{(1 - i)} = V_5(1 - i)$$

O que mostra que a equivalência permanece válida na data focal 4.



Vejamos agora o que ocorre *quando a capitalização é feita utilizando-se a taxa nominal.* O capital $V_3$ capitalizado para a data focal 4, é:

$$V_3(1 + i) = 1.371,74 \times 1,10 = 1.508,91$$

Ou seja, este valor difere de $V_5$ quando descontado para a data 4 (que vale 1.524,16). Logo, podemos dizer que:

$$V_3(1 + i) \neq V_5(1 - i)$$

Ou seja, *não ocorre equivalência para datas superiores à data do título que vence em primeiro lugar.* A equivalência, nestas condições, só permanece para datas inferiores à do título que vence em primeiro lugar.

## 3. CONJUNTOS EQUIVALENTES DE CAPITAIS COM DESCONTO COMERCIAL

Admitamos dois conjuntos de valores nominais, referidos às suas respectivas datas de vencimento, que têm origem comum:

| *1º Conjunto* | *2º Conjunto* |
|---|---|
| $C_1 \rightarrow m_1$ | $C'_1 \rightarrow m'_1$ |
| $C_2 \rightarrow m_2$ | $C'_2 \rightarrow m'_2$ |
| . . . | . . . |
| $C_n \rightarrow m_n$ | $C'_n \rightarrow m'_n$ |

Considerando o desconto comercial em regime de juros compostos e à taxa de juros $i$, os dois conjuntos de valores nominais serão equivalentes na data de origem, se:

$$C_1(1 - i)^{m_1} + C_2(1 - i)^{m_2} + \ldots + C_n(1 - i)^{m_n} =$$
$$= C'_1(1 - i)^{m'_1} + C'_2(1 - i)^{m'_2} + \ldots + C'_n(1 - i)^{m'_n}$$

*Exemplo:* Dados dois conjuntos de valores nominais, referidos à data focal zero e descontados comercialmente à taxa de juros compostos de 20% a.a., verificar se eles são equivalentes.

| 1º Conjunto | 2º Conjunto |
|---|---|
| $C_1 = 1.562,50 \rightarrow m_1 = 2$ anos | $C'_1 = 1.093,75 \rightarrow m'_1 = 2$ anos |
| $C_2 = 4.882,81 \rightarrow m_2 = 3$ anos | $C'_2 = 3.173,83 \rightarrow m'_2 = 4$ anos |
| $C_3 = 1.525,88 \rightarrow m_3 = 5$ anos | $C'_3 = 6.103,52 \rightarrow m'_3 = 5$ anos |

*Resolução:*

Façamos a comparação da soma dos valores atuais utilizando como data focal a data zero:

a) *1º Conjunto:*

$$S_{V_1} = C_1(1 - i)^{m_1} + C_2(1 - i)^{m_2} + C_3(1 - i)^{m_3}$$

$$S_{V_1} = 1.562,50\,(1 - 0,2)^2 + 4.882,81\,(1 - 0,2)^3 + 1.525,88\,(1 - 0,2)^5$$

$$S_{V_1} = 1.000,00 + 2.500,00 + 500,00$$

$$S_{V_1} = 4.000,00$$

b) *2º Conjunto:*

$$S_{V_2} = C'_1(1 - i)^{m'_1} + C'_2(1 - i)^{m'_2} + C'_3(1 - i)^{m'_3}$$

$$S_{V_2} = 1.093,75\,(1 - 0,2)^2 + 3.173,83\,(1 - 0,2)^4 + 6.103,52\,(1 - 0,2)^5$$

$$S_{V_2} = 700,00 + 1.300,00 + 2.000,00$$

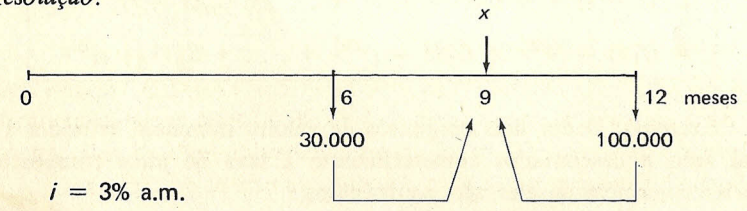
$$S_{V_2} = 4.000,00$$

Sendo $S_{V_1} = S_{V_2}$, concluímos que os dois conjuntos de capitais são equivalentes sob o critério de desconto comercial composto.

## 4. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dois títulos, um de Cr$ 30.000,00 para 6 meses e outro de Cr$ 100.000,00 para 1 ano, são trocados por um único, vencendo em 9 meses. Se for adotada a taxa de desconto comercial de 3% a.m., qual será o valor deste novo título?

*Resolução:*






Temos que:

$$V_1 = C_1(1 - i)^1$$

portanto:

$$C_1 = \frac{V_1}{(1 - i)^1}$$

O valor do título ($x$), considerando a data focal nove, será de:

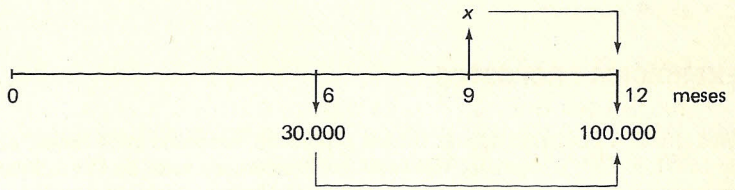
$$x = \frac{30.000}{(1 - 0,03)^3} + 100.000\,(1 - 0,03)^3$$

$$x = \frac{30.000}{0,912673} + 100.000\,(0,912673)$$

$$x = 32.870,48 + 91.267,30$$

$$x = \text{Cr\$ } 124.137,78$$

Caso escolhêssemos a data focal doze, a equação de valor seria:




$$\frac{x}{(1 - 0,03)^3} = \frac{30.000}{(1 - 0,03)^6} + 100.000$$

$$\frac{x}{0,912673} = \frac{30.000}{0,832972} + 100.000$$

$$\frac{x}{0,912673} = 36.015,62 + 100.000$$

$$\frac{x}{0,912673} = 136.015,62$$

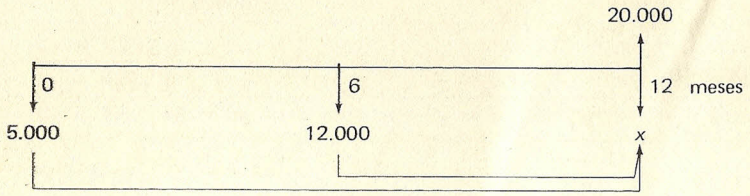
$$x = 136.015,62\,(0,912673)$$

$$x = \text{Cr\$ } 124.137,78$$

Chegando-se ao mesmo valor.

2. Uma empresa, devendo Cr$ 20.000,00 em 12 meses, resolve antecipar parte de sua dívida, pagando Cr$ 5.000,00 hoje e comprometendo-se a pagar Cr$ 12.000,00 em 6 meses. Que valor restante será pago em 12 meses? Considerar a taxa de desconto comercial de 10% a.s.

*Resolução:*




$i = 10\%$ a.s.

$$20.000 = x + \frac{12.000}{(1 - 0{,}1)^1} + \frac{5.000}{(1 - 0{,}1)^2}$$

$$20.000 = x + \frac{12.000}{0{,}90} + \frac{5.000}{0{,}81}$$

$$20.000 = x + 13.333{,}33 + 6.172{,}84$$

$$\therefore \; x = \text{Cr\$ } 493{,}83$$

## 5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Uma dívida é resultante de três títulos: o primeiro, vencendo em 4 meses, no valor de Cr$ 1.000,00, o segundo, vencendo em 8 meses, no valor de Cr$ 1.500,00 e o terceiro, em 1 ano, no valor de Cr$ 2.000,00. O devedor, desejando liquidá-la rapidamente, propõe ao credor saldá-la em três pagamentos iguais, vencendo o primeiro em 1 mês, o segundo em 2 meses e o terceiro em 3 meses. A taxa de juros contratada é de 3% a.m. Qual é o valor dos pagamentos, sabendo-se que foi utilizado o desconto comercial composto?
**Resposta:** Cr$ 1.221,36.

2. Um carro usado é vendido em três prestações trimestrais de Cr$ 4.000,00, sendo a primeira dada como entrada. Um cliente propõe Cr$ 5.000,00 de entrada, mais três pagamentos iguais bimestrais. Se a taxa de mercado for de 3,5% a.m., qual será o valor destes pagamentos sob o critério de desconto comercial composto?
**Resposta:** Cr$ 2.235,15.

3. O título de sócio de um clube é vendido por Cr$ 2.000,00 de entrada mais duas parcelas bimestrais, sendo a primeira de Cr$ 5.000,00 e a segunda de Cr$ 10.000,00. Numa campanha promocional, o clube está oferecendo este título em quatro pagamentos trimestrais iguais, sendo o primeiro dado como entrada. Qual é o valor destes pagamentos, se a taxa de juros considerada for de 40% a.a. e se for adotado o desconto comercial composto?
**Resposta:** Cr$ 4.503,68

*Sugestão:* calcular a taxa equivalente mensal (v. problema proposto nº 6 do capítulo V).





# ANUIDADES E EMPRÉSTIMOS

# 7

## Rendas Certas ou Anuidades

Nas aplicações financeiras o capital pode ser pago ou recebido de uma só vez ou através de uma sucessão de pagamentos ou de recebimentos.

Quando o objetivo é constituir-se um capital em uma data futura, tem-se um processo de *capitalização*. Caso contrário, quando se quer pagar uma dívida, tem-se um processo de *amortização*.

Pode ocorrer também o caso em que se tem o pagamento pelo uso, sem que haja amortização, que é o caso dos aluguéis.

Estes exemplos caracterizam a existência de rendas ou anuidades, que podem ser basicamente de dois tipos:

a) *Rendas certas ou determinísticas:* São aquelas cuja duração e pagamentos são predeterminados, não dependendo de condições externas.

Os diversos parâmetros, como o valor dos termos, prazo de duração, taxa de juros etc., são fixos e imutáveis.

Tais tipos de renda são estudados pela Matemática Financeira.

b) *Rendas aleatórias ou probabilísticas:* Os valores e/ou as datas de pagamentos ou de recebimentos podem ser variáveis aleatórias. É o que ocorre, por exemplo, com os seguros de vida: os valores de pagamentos (mensalidades) são certos, sendo aleatórios o valor do seguro a receber e a data de recebimento.

Rendas com essas características são estudadas pela Matemática Atuarial.

Nesse texto serão abordadas apenas as *rendas certas ou anuidades*, sob o regime de *juros compostos*, a menos que explicitado o contrário. Opera-se em juros compostos porque este regime de juros retrata melhor a realidade e porque as fórmulas são mais fáceis de manejar, encontrando-se tabelados seus coeficientes.

## 1. DEFINIÇÕES

Seja a série seguinte de capitais, referidos às suas respectivas datas, que por sua vez são referidos a uma dada data focal:

$$\begin{array}{ll} R_1 & \rightarrow n_1 \\ R_2 & \rightarrow n_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ R_m & \rightarrow n_m \end{array}$$

Estes capitais, que podem ser pagamentos ou recebimentos, referidos a uma dada taxa de juros *i*, caracterizam uma *anuidade ou renda certa.*

Os valores que constituem a renda são os *termos* da mesma. O intervalo de tempo entre dois termos chama-se *período* e a soma dos períodos define a *duração* da anuidade.

O *valor atual* de uma anuidade é a soma dos valores atuais dos seus termos, soma esta feita para uma mesma data focal e à mesma taxa de juros. De modo análogo, o *montante* de uma anuidade é a soma dos montantes de seus termos, considerada uma dada taxa de juros e uma data focal.

## 2. CLASSIFICAÇÃO DAS ANUIDADES

### 2.1. Quanto ao prazo

a) *Temporárias:* quando a duração for limitada.

b) *Perpétuas:* quando a duração for ilimitada.

### 2.2. Quanto ao valor dos termos

a) *Constante:* se todos os termos são iguais.

b) *Variável:* se os termos não são iguais entre si.



### 2.3. Quanto à forma de pagamento ou de recebimento

a) *Imediatas:* quando os termos são exigíveis a partir do primeiro período.

1) *Postecipadas ou vencidas:* Se os termos são exigíveis no fim dos períodos.

2) *Antecipadas:* Se os termos são exigíveis no início dos períodos.

b) *Diferidas:* se os termos forem exigíveis a partir de uma data que não seja o primeiro período.

1) *Postecipadas ou vencidas:* se os termos são exigíveis no fim dos períodos.

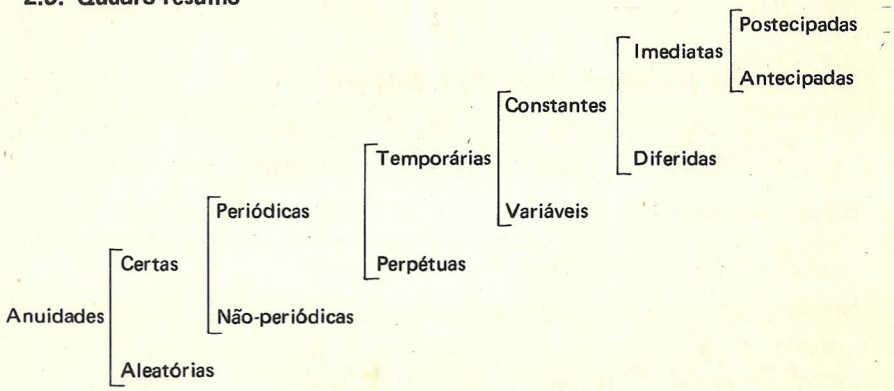
2) *Antecipadas:* se os termos são exigíveis no início dos períodos.

### 2.4. Quanto à periodicidade

a) *Periódicas:* se todos os períodos são iguais.

b) *Não-periódicas:* se os períodos não são iguais entre si.

### 2.5. Quadro-resumo




## 3. MODELO BÁSICO DE ANUIDADE

### 3.1. Introdução

Por modelo básico de anuidade entendemos as anuidades que são simultaneamente

- temporárias;
- constantes;
- imediatas e postecipadas;
- periódicas.

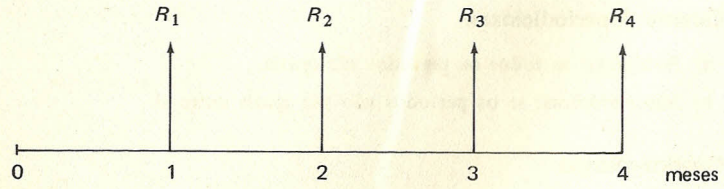
E que a taxa de juros "i" seja referida ao mesmo período dos termos.

Para a melhor compreensão do modelo básico de anuidade suponhamos um exemplo:

"João compra um carro, que irá pagar em 4 prestações mensais de Cr$ 2.626,24, sem entrada. As prestações serão pagas a partir do mês seguinte ao da compra e o vendedor afirmou estar cobrando uma taxa de juros compostos de 2% a.m. Pergunta-se o preço do carro a vista".

*Resolução:*

O preço do carro a vista corresponde à soma dos valores atuais das prestações na data focal zero, calculados à taxa de 2% a.m.




A soma dos valores atuais ($P$) é dada por:

$$P = \frac{R_1}{(1{,}02)^1} + \frac{R_2}{(1{,}02)^2} + \frac{R_3}{(1{,}02)^3} + \frac{R_4}{(1{,}02)^4}$$

Porém, colocando:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$$

tem-se:

$$P = \frac{R}{(1{,}02)} + \frac{R}{(1{,}02)^2} + \frac{R}{(1{,}02)^3} + \frac{R}{(1{,}02)^4}$$

$$P = R\left[\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{(1{,}02)^2} + \frac{1}{(1{,}02)^3} + \frac{1}{(1{,}02)^4}\right]$$

$$P = R\,[0{,}980392 + 0{,}961169 + 0{,}942322 + 0{,}923845]$$

$$P = R\,[3{,}807728]$$

Como $R = 2.626{,}24$, tem-se:

$$P = 2.626{,}24 \times 3{,}807728 \cong \text{Cr\$ } 10.000{,}00$$

Concluímos que o preço do carro a vista é de Cr$ 10.000,00. Observe-se que este valor foi obtido multiplicando-se a prestação dada por uma constante numérica que depende do número de períodos e da taxa de juros adotada.

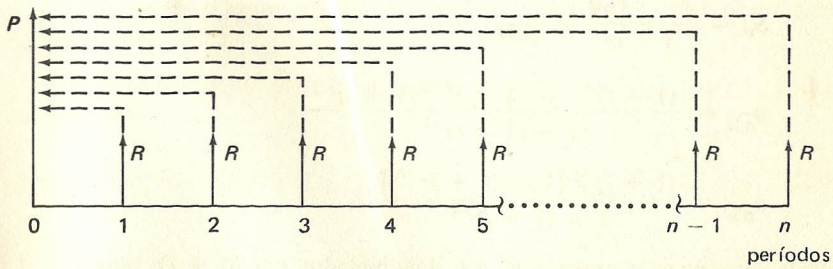


De modo inverso, se tivermos o preço do carro a vista, calculando-se esta constante, poderemos obter o valor da prestação. Para tanto, bastará fazer-se a divisão do valor a vista pelo valor da constante.

### 3.2. Valor atual do modelo básico

Seja um principal $P$ a ser pago em $n$ termos iguais a $R$, imediatos postecipados e periódicos. Seja também uma taxa de juros $i$, referida ao mesmo período dos termos.

A representação gráfica do modelo é a seguinte:




A soma do valor atual dos termos na data zero é dada por:

$$P = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Ou, colocando-se $R$ em evidência:

$$P = R\left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Colocando-se a soma entre colchetes como sendo:

$$\boxed{a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}}$$

Temos:

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$a_{\overline{n}|i}$ lê-se *"a, n cantoneira i"* ou, simplesmente, *"a, n, i"*.

O valor de $a_{\overline{n}|i}$ é obtido pela soma dos termos de uma *progressão geométrica* com as seguintes características:

*Valor da soma:* $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1 - q}$

*1º termo:* $a_1 = \dfrac{1}{(1+i)} = (1+i)^{-1}$

*n-ésimo termo:* $a_n = \dfrac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$

*razão:* $q = \dfrac{1}{(1+i)} = (1+i)^{-1}$

Como na prática $i \geqslant 0$, tem-se $q \leqslant 1$.

Substituindo-se os valores respectivos na fórmula da soma, tem-se:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} = a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{1-(1+i)^{-1}}$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador por $(1+i)$, temos:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{(1+i)-(1+i)(1+i)^{-1}}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^0[1-(1+i)^{-n}]}{(1+i)-(1+i)^0}$$

Como $(1+i)^0 = 1$, temos:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{1+i-1}$$

$$\therefore \quad \boxed{a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \qquad (29)$$

A fórmula mais usual para o $a_{\overline{n}|i}$ é obtida multiplicando-se o numerador e o denominador da expressão anterior por $(1+i)^n$:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{[1-(1+i)^{-n}](1+i)^n}{i(1+i)^n}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-n}}{i(1+i)^n}$$



$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^0}{i(1+i)^n}$$

Logo:

$$\boxed{a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}} \qquad (29')$$

Esta fórmula encontra-se tabelada para diversos valores de $i$ e de $n$ (ver Apêndice de Tabelas Financeiras).

O leitor pode obter quaisquer valores desejados pelo cálculo direto através da fórmula.

A dedução feita permite expressar o *valor atual* do modelo básico como sendo:

$$\boxed{P = R \cdot a_{\overline{n}|i}} \qquad (30)$$

Por outro lado, sendo fornecido o principal $(P)$, a taxa de juros $(i)$ e o número de períodos $(n)$, o valor da prestação (ou termo constante da anuidade $- R$) é dado por:

$$\boxed{R = \frac{P}{a_{\overline{n}|i}}}$$

Estas duas expressões permitem, respectivamente, que se calcule o principal, dado o termo, e, dado o principal, calcular o termo.

Vejamos alguns exemplos:

*Exemplo I:* Seja o exemplo já resolvido na Introdução (item 4.1.).

*Resolução:*

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

onde:

$n = 4$ m.

$i = 2\%$ a.m.

$$a_{\overline{4}|2} = \frac{(1{,}02)^4 - 1}{(1{,}02)^4 \cdot 0{,}02} \cong 3{,}807729$$

Portanto, como $R = 2.626,24$:

$$P = 2.626,24 \times 3,807729 \cong 10.000,00$$

*Exemplo II:* Um televisor em cores custa Cr$ 5.000,00 a vista, mas pode ser financiado sem entrada em 10 prestações mensais à taxa de 3% a.m. Calcular a prestação a ser paga pelo comprador.

*Resolução:*

$$R = \frac{P}{a_{\overline{n}|i}}$$

onde:

$P = 5.000,00$

$n = 10$ m.

$i = 3\%$ a.m.

Procurando numa tabela ou calculando diretamente, tem-se:

$$a_{\overline{10}|3} \cong 8,530203$$

Logo:

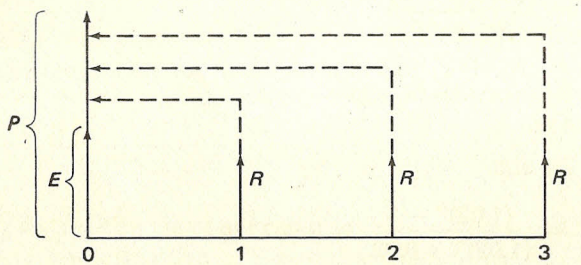
$$R = \frac{5.000,00}{8,530203} = \text{Cr\$ } 586,15$$

Portanto, o comprador deverá pagar uma prestação mensal de Cr$ 586,15, por 10 meses.

*Exemplo III:* Uma aparelhagem de som estereofônico está anunciada nas seguintes condições: Cr$ 1.500,00 de entrada e 3 prestações mensais iguais de Cr$ 1.225,48. Sabendo-se que o juro cobrado nas lojas de som é de 2,5% a.m., calcular o preço a vista.

*Resolução:*

Chamando a entrada de $E$ e as prestações de $R$, temos:






Portanto, o principal ($P$), que é o valor atual das prestações na data zero somado à entrada ($E$), pode ser expresso do seguinte modo:

$$P = E + Ra_{\overline{3}|2,5}$$

onde:

$E = 1.500,00$

$R = 1.225,48$

$a_{\overline{3}|2,5} \cong 2,856024$

Logo:

$$P = 1.500,00 + 1.225,48 \times 2,856024$$

$$P = 1.500,00 + 3.500,00$$

$$\therefore P = \text{Cr\$ } 5.000,00$$

Portanto, o preço a vista nas condições dadas é de Cr$ 5.000,00.

*Exemplo IV:* Um carro é vendido por Cr$ 20.000,00 a vista, ou em 12 prestações mensais de Cr$ 1.949,74. Qual é a taxa de juros mensal que está sendo cobrada?

*Resolução:*

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$20.000 = 1.949,74 \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{20.000}{1.949,74} \cong 10,257778$$

Logo:

$$a_{\overline{12}|i} \cong 10,257778$$

Como:

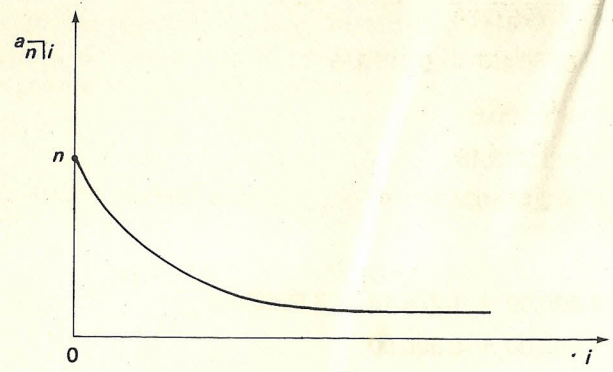
$$a_{\overline{12}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-12}}{i}$$

o problema é encontrar-se a taxa de juros $i$ que satisfaça a igualdade:

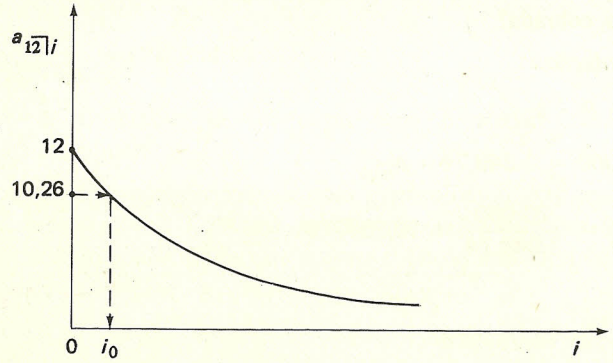
$$\frac{1 - (1 + i)^{-12}}{i} = 10,257778$$

Como não é possível a determinação direta da taxa através da fórmula, devemos proceder por tentativa e erro ou procurando numa tabela.

O gráfico de $a_{\overline{n}|i}$ em função de $i$ tem o seguinte aspecto:




Como já temos o valor de $a_{\overline{n}|i}$, nosso problema é determinar uma taxa inicial que sirva de ponto de partida:




Evidentemente, podemos admitir um intervalo arbitrário para a taxa (por exemplo, 1% a.m.) e, partindo de zero, ir calculando valores sucessivos de $a_{\overline{n}|i}$ até obter duas taxas que contenham o valor dado de $a_{\overline{n}|i}$. Entretanto, uma boa aproximação para uma primeira estimativa da taxa pode ser obtida através da seguinte fórmula:

$$i_0 = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - \frac{a_{\overline{n}|i}}{n^2}$$



Aplicando-se os valores dados a esta expressão, obtém-se:

$$i_0 = \frac{1}{10{,}257778} - \frac{10{,}257778}{12^2}$$

$$i_0 = 0{,}097487 - 0{,}071235$$

$$i_0 = 0{,}026252$$

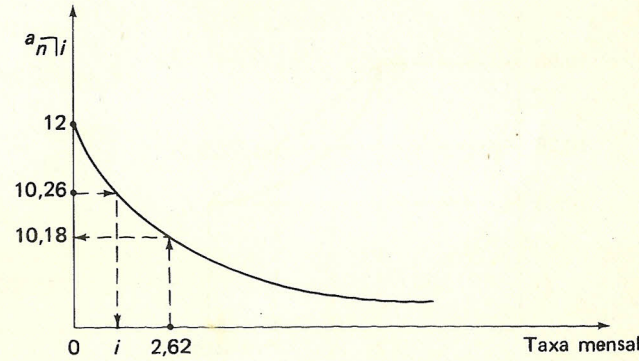
$$i_0 \cong 2{,}62\% \text{ a.m.}$$

Calculando-se o valor do $a_{12\overline{|}2{,}62}$, para fazer-se o teste em relação ao valor dado, tem-se:

$$a_{12\overline{|}2{,}62} = \frac{1 - (1{,}0262)^{-12}}{0{,}0262} = \frac{1 - 0{,}733189}{0{,}0262}$$

$$a_{12\overline{|}2{,}62} = 10{,}183630$$

Temos então:




Ou seja, a taxa obtida tem valor superior à taxa de juros ($i$) que queremos obter.

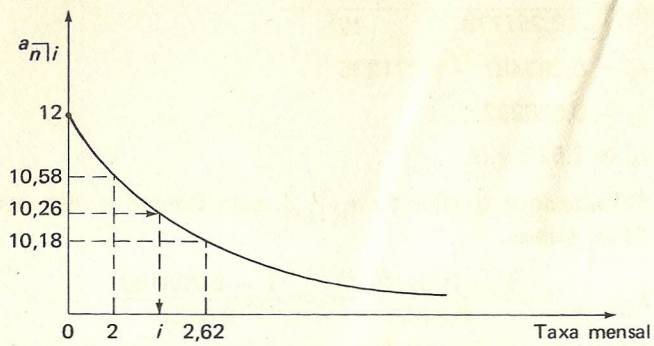
Vamos admitir uma taxa de juros menor (por exemplo, $i_1 = 2\%$ a.m.) para se tentar obter um valor inferior, de tal modo que a taxa procurada esteja contida no intervalo.

Temos:

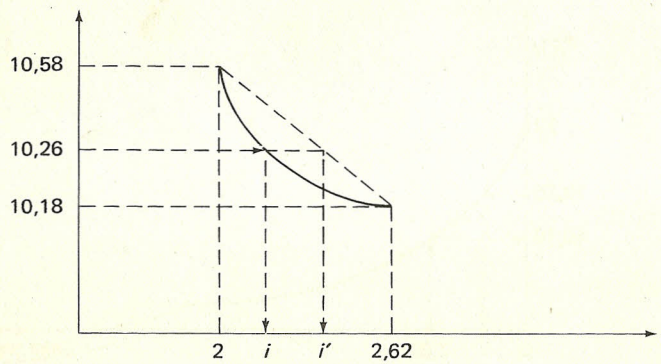
$$a_{12\overline{|}2} = \frac{1 - (1{,}02)^{-12}}{0{,}02}$$

$$a_{12\overline{|}2} = 10{,}575341$$

Graficamente, a situação é a seguinte:

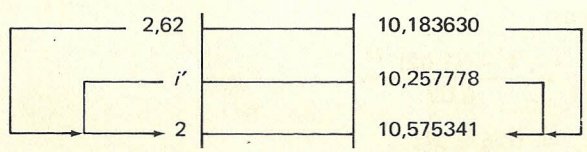



Podemos obter agora uma aproximação da taxa ($i$), fazendo uma interpolação linear:




A interpolação linear permitirá obter um valor da taxa igual a $i'$, enquanto que a taxa verdadeira é $i$. Como já foi visto antes, estaremos cometendo um erro de aproximação, que pode ser diminuído por interpolações sucessivas.

A interpolação pode ser feita do seguinte modo:






$$\frac{i' - 2}{2{,}62 - 2} = \frac{10{,}257778 - 10{,}575341}{10{,}183630 - 10{,}575341}$$

$$\frac{i' - 2}{0{,}62} = \frac{-0{,}317563}{-0{,}391711}$$

$$\frac{i' - 2}{0{,}62} = 0{,}810707$$

$$i' - 2 = 0{,}502638$$

$$i' \cong 2{,}503\% \text{ a.m.}$$

O leitor poderá prosseguir interpolando até chegar à taxa exata, que é 2,5% a.m.

*Exemplo V:* Um tapete persa é vendido por Cr$ 15.000,00 a vista. Pode ser adquirido também em prestações mensais de Cr$ 885,71, a juros de 3% a.m. Sabendo que as prestações vencem a partir do mês seguinte ao da compra, pede-se para calcular o número de prestações.

*Resolução:*

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$15.000 = 885{,}71 \cdot a_{\overline{n}|3}$$

$$a_{\overline{n}|3} = \frac{15.000}{885{,}71} = 16{,}935566$$

Temos que:

$$16{,}935566 = \frac{1 - (1{,}03)^{-n}}{0{,}03}$$

$$1 - (1{,}03)^{-n} = 0{,}508067$$

$$(1{,}03)^{-n} = 0{,}491933$$

Extraindo-se o logaritmo dos dois membros, tem-se:

$$-n \log (1{,}03) = \log (0{,}491933)$$

$$n = -\frac{\log (0{,}491933)}{\log (1{,}03)}$$

$$n = -\frac{-0{,}308094}{0{,}012837} \cong 24$$

**Observação:** sabendo que a taxa é de 3% a.m. e que:

$$(1{,}03)^{-n} = 0{,}491933$$

Temos:

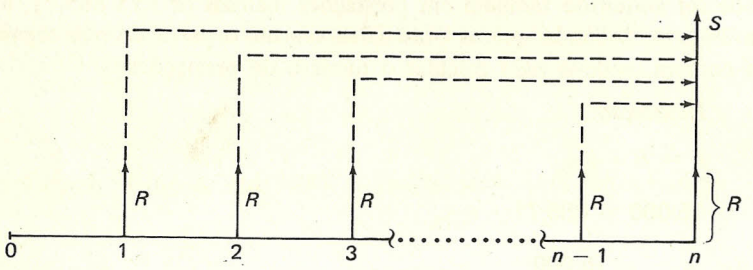
$$(1{,}03)^n = \frac{1}{0{,}491933} = 2{,}032797$$

Procurando na tabela, para uma taxa de 3%, encontramos $n = 24$.

### 3.3. Montante do modelo básico

Seja um processo de capitalização em que são aplicadas $n$ parcelas iguais a $R$, periódicas e postecipadas, a uma taxa de juros $i$, referida ao mesmo período dos termos. O problema é determinar o montante ($S$) na data focal $n$, que resulta deste processo de capitalização.

A representação gráfica deste modelo é a seguinte:




O montante ($S$) é o resultado da soma dos montantes de cada um dos termos, à taxa de juros $i$, na data focal $n$. Vamos admitir que estejamos fazendo esta soma a partir do termo de $n$-ésima ordem (ou seja, o último termo) e até o termo de 1ª ordem (que é o primeiro termo):

$$S = R + R(1 + i)^1 + R(1 + i)^2 + \ldots + R(1 + i)^{n-1}$$

Colocando-se o $R$ em evidência:

$$S = R[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{n-1}]$$

Seja a seguinte notação para o valor da soma entre colchetes:

$$\boxed{S_{\overline{n}|i} = 1 + (1 + i)^1 + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{n-1}}$$

Logo, temos:

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

$S_{\overline{n}|i}$ lê-se: "$S$, $n$ cantoneira $i$" ou, simplesmente, "$s$, $n$, $i$".



A fórmula do $S_{\overline{n}|i}$ é obtida pela soma dos termos de uma *progressão geométrica*:

*Valor da soma:* $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1 - q}$

*1º termo:* $a_1 = 1$

*n-ésimo termo:* $a_n = (1 + i)^{n-1}$

*razão:* $q = (1 + i)$

Substituindo-se na fórmula da soma:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = S_{\overline{n}|i}$$

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{n-1}(1 + i)}{1 - (1 + i)}$$

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^n}{-i}$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador por $(-1)$:

$$\boxed{S_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}} \qquad (31)$$

Esta fórmula também se encontra tabelada para diversos valores de $i$ e de $n$. O leitor deve observar que é possível o cálculo direto de qualquer valor desejado através da fórmula.

Podemos agora expressar o montante ($S$) do modelo básico de anuidades como sendo:

$$\boxed{S = R \cdot S_{\overline{n}|i}} \qquad (32)$$

Através desta relação pode-se calcular o montante que resulta quando são capitalizadas $n$ parcelas de valor $R$ à taxa de juros $i$.

Por outro lado, sabendo-se qual o montante ($S$) desejado, e sabendo-se qual a taxa de juros ($i$) de aplicação, pode-se calcular o valor dos termos que devem ser aplicados:

$$\boxed{R = \frac{S}{S_{\overline{n}|i}}}$$

*Exemplo I:* Uma pessoa deposita Cr$ 1.000,00 mensalmente. Sabendo-se que ela está ganhando 2% a.m., quanto possuirá em 2 anos?

*Resolução:*

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

onde:

$R = 1.000,00$

$S_{\overline{24}|2} = 30,421862$

Portanto:

$S = 1.000,00 \times 30,421862$

$S = \text{Cr\$ } 30.421,86$

Logo, após 2 anos, a pessoa possuirá Cr$ 30.421,86.

*Exemplo II:* Uma pessoa deseja comprar um carro por Cr$ 40.000,00 a vista, daqui a 12 meses. Admitindo-se que ela vá poupar uma certa quantia mensal que será aplicada em letras de câmbio rendendo 2,2% a.m. de juros compostos, determinar quanto deve ser poupado mensalmente.

*Resolução:*

Neste caso, o montante é dado:

$S = 40.000,00$

Como a taxa de 2,2% não se encontra tabelada, fazemos o cálculo diretamente:

$$S_{\overline{12}|2,2} = \frac{(1,022)^{12} - 1}{0,022} = \frac{1,298407 - 1}{0,022} =$$

$$= \frac{0,298407}{0,022} = 13,563955$$

Temos:

$$R = \frac{S}{S_{\overline{12}|2,2}}$$

$$R = \frac{40.000,00}{13,563955} = 2.948,99$$

$\therefore R \cong \text{Cr\$ } 2.949,00$

Então, se a pessoa poupar Cr$ 2.949,00 por mês e fizer a aplicação a 2,2% a.m. por 12 meses poderá comprar o carro pretendido.



### 3.4. Relação entre os fatores $a_{\overline{n}|i}$ e $S_{\overline{n}|i}$

Pela fórmula (29') temos:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$$

Multiplicando-se os dois membros por $(1 + i)^n$:

$$(1 + i)^n \cdot a_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \cdot (1 + i)^n$$

$$(1 + i)^n \cdot a_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Como o segundo membro desta igualdade é, exatamente, o valor de $S_{\overline{n}|i}$ (V. fórmula 31), podemos escrever:

$$\boxed{S_{\overline{n}|i} = (1 + i)^n \cdot a_{\overline{n}|i}} \qquad (33)$$

Esta relação permite que se relacione o principal ($P$) com o montante ($S$) do modelo básico.

De fato, sendo:

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

Substituindo a relação (33):

$$S = (1 + i)^n \cdot a_{\overline{n}|i} \cdot R$$

Como sabemos que:

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Temos:

$$\boxed{S = P(1 + i)^n} \qquad (34)$$

Ou seja, o montante ($S$) do modelo básico é igual ao principal ($P$) capitalizado por $n$ períodos à taxa de juros $i$.

**Nota:** Veja no Apêndice a este capítulo outra relação entre o $a_{\overline{n}|i}$ e o $S_{\overline{n}|i}$.

*Exemplo:* uma pessoa possui Cr$ 30.000,00, que pode aplicar do seguinte modo:

a) no banco A, que paga um juro de 3% a.m. ao fim de cada mês, devolvendo o capital no fim do 12º mês.

b) no banco B, que devolve Cr$ 42.000,00 no fim do 12º mês.

Pede-se determinar a melhor aplicação.

*Resolução:*

A melhor aplicação será aquela que conduzir ao maior montante na data focal 12:

*Banco A:* A aplicação de Cr$ 30.000,00 a um juro de 3% a.m. produz uma renda mensal de Cr$ 900,00. Portanto, o montante na data focal 12 é:

$$S_A = 30.000,00 + 900,00 \cdot s_{\overline{12}|3}$$

$$S_A = 30.000,00 + 900,00 \times 14,192030$$

$$S_A = 30.000,00 + 12.772,83$$

$$S_A = \text{Cr\$ } 42.772,83$$

Note-se que pela fórmula (34) este resultado pode ser obtido diretamente.

$$S_A = 30.000,00\,(1,03)^{12}$$

$$S_A = 30.000,00 \times 1,425761$$

$$S_A = \text{Cr\$ } 42.772,83$$

Já sabemos que o Banco B devolve:

$$S_B = \text{Cr\$ } 42.000,00$$

Logo, concluímos que é melhor aplicar no banco A, ganhando um adicional de Cr$ 772,83.

## 4. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Qual é o valor atual de uma anuidade periódica de Cr$ 1.000,00, nas hipóteses abaixo:

| Taxa de juros | Prazo |
|---|---|
| a) 1% a.m. | 24 meses |
| b) 5% a.b. | 12 bimestres |
| c) 8% a.t. | 10 trimestres |
| d) 10% a.s. | 20 semestres |
| e) 30% a.a. | 30 anos |



*Resolução:*

Para o cálculo do valor atual de uma série periódica de $n$ termos, à taxa $i$, temos a fórmula:

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

onde:

$P$ = valor atual

$R$ = valor do termo (ou da prestação)

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

O fator $a_{\overline{n}|i}$ pode ser calculado, conforme expressão acima, ou então procurado em tabelas financeiras, onde seu resultado é apresentado para taxas e períodos mais usuais (ver Apêndice de Tabelas).

a) $R = 1.000$

$n = 24$ meses

$i = 1\%$ a.m.

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$P = 1.000 \cdot a_{\overline{24}|1}$$

Procurando nas tabelas, encontramos que, para $i = 1\%$ a.m. e $n = 24$, $a_{\overline{n}|i} = 21,243387$.

Se quiséssemos calcular este fator, teríamos:

$$a_{\overline{24}|1} = \frac{1 - (1,01)^{-24}}{0,01} = \frac{1 - \dfrac{1}{(1,01)^{24}}}{0,01}$$

$$a_{\overline{24}|1} = \frac{1 - 0,787566}{0,01} = \frac{0,212434}{0,01} = 21,2434$$

Então:

$$P = 1.000(21,243387)$$

$$P = \text{Cr\$ } 21.243,39$$

b) $R = 1.000$

$n = 12$ bimestres

$i = 5\%$ a.b.

$P = 1.000 \cdot a_{12\rceil 5}$

$P = 1.000(8,863252)$

$P = \text{Cr\$ } 8.863,25$

c) $R = 1.000$

$n = 10$ trimestres

$i = 8\%$ a.t.

$P = 1.000 \cdot a_{10\rceil 8}$

$P = 1.000(6,710081)$

$P = \text{Cr\$ } 6.710,08$

d) $R = 1.000$

$n = 20$ semestres

$i = 10\%$ a.s.

$P = 1.000 \cdot a_{20\rceil 10}$

$P = 1.000(8,513564)$

$P = \text{Cr\$ } 8.513,56$

e) $R = 1.000$

$n = 30$ anos

$i = 30\%$ a.a.

$P = 1.000 \cdot a_{30\rceil 30}$

$P = 1.000(3,332061)$

$P = \text{Cr\$ } 3.332,06$

2. Qual é o preço a vista de uma mercadoria cuja prestação mensal é de Cr$ 300,00, se as taxas e prazos abaixo forem considerados:

a) 3% a.m. – 24 meses

b) 3% a.m. – 36 meses

c) 4% a.m. – 24 meses

d) 5% a.m. – 12 meses

*Resolução:*

O preço a vista nada mais é do que o valor atual das prestações:

$P = R \cdot a_{\overline{n}\rceil i}$, onde $P$ = preço a vista



a) $R = 300$

$n = 24$ meses

$i = 3\%$ a.m.

$P = 300 \cdot a_{24\rceil 3}$

$P = 300(16,935542)$

$P = \text{Cr\$ } 5.080,66$ (preço a vista)

b) $R = 300$

$n = 36$ meses

$i = 3\%$ a.m.

$P = 300 \cdot a_{36\rceil 3}$

$P = 300(21,832252)$

$P = \text{Cr\$ } 6.549,68$

c) $R = 300$

$n = 24$ meses

$i = 4\%$ a.m.

$P = 300 \cdot a_{24\rceil 4}$

$P = 300(15,246963)$

$P = \text{Cr\$ } 4.574,09$

d) $R = 300$

$n = 12$ meses

$i = 5\%$ a.m.

$P = 300 \cdot a_{12\rceil 5}$

$P = 300(8,863252)$

$P = \text{Cr\$ } 2.658,98$

3. Uma loja vende um tapete em 12 prestações mensais de Cr$ 97,49 ou em 24 prestações mensais de Cr$ 61,50. Nos dois casos, o cliente não dará entrada alguma. Sabendo-se que a taxa de juros do crédito pessoal é de 2,5% a.m., pergunta-se: Qual é o melhor sistema para o comprador?

*Resolução:*

Para compararmos os dois esquemas de pagamento, basta calcular o preço

a vista em cada caso. Se os dois preços forem iguais, os esquemas serão equivalentes.

*1ª Alternativa:*

$R = 97{,}49$

$n = 12$ meses

$i = 2{,}5\%$ a.m.

$P = R \cdot a_{\overline{12}|2{,}5}$

$P = 97{,}49\,(10{,}257765)$

$P = \text{Cr\$ } 1.000{,}03$ (preço a vista)

*2ª Alternativa:*

$R = 61{,}50$

$n = 24$ meses

$i = 2{,}5\%$ a.m.

$P = R \cdot a_{\overline{24}|2{,}5}$

$P = 61{,}50\,(17{,}884986)$

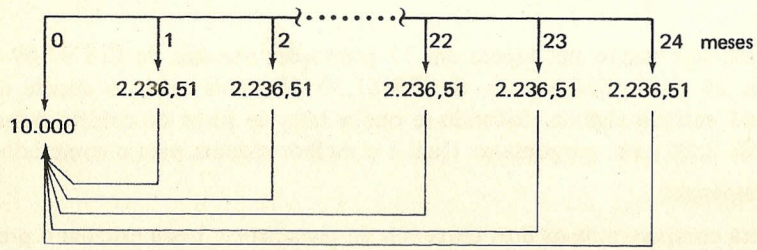
$P = \text{Cr\$ } 1.099{,}93$ (preço a vista)

Fica, portanto, patente que na segunda alternativa o preço a vista é maior, donde se conclui que a melhor alternativa é a primeira.

4. Um carro está à venda por Cr$ 10.000,00 de entrada mais 24 prestações mensais de Cr$ 2.236,51. Como opção, a agência vende em 36 prestações mensais de Cr$ 1.613,16, sendo neste caso exigida uma entrada de Cr$ 12.000,00. Qual é a melhor alternativa, se a taxa de mercado for de 3% a.m.?

*Resolução:*

*1ª Alternativa:*






O valor atual desta alternativa, à taxa de 3% a.m., será:

$P = E + R \cdot a_{\overline{24}|3}$, onde $E =$ entrada

$P = 10.000 + 2.236{,}51\,(16{,}935542)$

$P = \text{Cr\$ } 47.876{,}51$

*2ª Alternativa:*

$P = E + R \cdot a_{\overline{36}|3}$

$P = 12.000 + 1.613{,}16\,(21{,}832252)$

$P = \text{Cr\$ } 47.218{,}92$

A segunda alternativa é a melhor para o comprador, visto que possui menor valor atual.

5. A Imobiliária Barracão S/A vende um pequeno apartamento usado por Cr$ 150.000,00 a vista. Como alternativas a seus clientes, oferece dois planos de financiamento:

Plano A: entrada de Cr$ 50.000,00 mais 4 prestações trimestrais de Cr$ 31.600,00.

Plano B: entrada de Cr$ 30.000,00 mais 8 prestações trimestrais de Cr$ 23.000,00.

O Sr. João de Souza, capitalista que aplica seu dinheiro a 10% a.t., deseja saber qual é a sua melhor opção de compra.

*Resolução:*

Calculando-se o valor atual em cada caso, à taxa de 10% a.t., teremos:

*Plano A:*

$P = E + R \cdot a_{\overline{n}|i}$

$P = 50.000 + 31.600 \cdot a_{\overline{4}|10}$

$P = 50.000 + 31.600\,(3{,}169865)$

$P = \text{Cr\$ } 150.167{,}75$

*Plano B:*

$P = E + R \cdot a_{\overline{n}|i}$

$P = 30.000 + 23.000 \cdot a_{\overline{8}|10}$

$P = 30.000 + 23.000\,(5{,}334926)$

$P = \text{Cr\$ } 152.703{,}30$

Como nos dois planos de financiamento o valor atual é superior ao preço a vista (Cr$ 150.000,00), então a melhor opção de compra será esta.

6. Qual é a anuidade periódica equivalente a um valor atual de Cr$ 10.000,00, se forem observadas as taxas e prazos abaixo:

Taxa de juros —— Prazo

a) 2,5% a.m. —— 24 meses

b) 4,0% a.m. —— 12 meses

c) 30,0% a.a. —— 5 anos

*Resolução:*

Aplicando a fórmula do valor atual, temos:

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

onde:

$P$ = valor atual

$R$ = termo (prestação)

$a_{\overline{n}|i}$ = fator de valor atual para $n$ períodos e à taxa $i$ por período

Como queremos encontrar o valor do termo, consideraremos:

$$R = \frac{P}{a_{\overline{n}|i}}$$

a) $P = 10.000$

$n = 24$ meses

$i = 2,5\%$ a.m.

$$R = \frac{10.000}{a_{\overline{24}|2,5}}$$

$$R = \frac{10.000}{17,884986}$$

$$R = \text{Cr\$ } 559,13$$

**Nota:** Algumas tabelas financeiras apresentam, além do fator $a_{\overline{n}|i}$, o seu inverso $\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$. Neste último caso, naturalmente, multiplicamos o valor atual pelo inverso.

No problema acima exposto, teríamos:

$$R = 10.000 \cdot \frac{1}{a_{\overline{24}|2,5}}$$

Como

$$a_{\overline{24}|2,5} = 17,884986,$$



então

$$\frac{1}{a_{\overline{24}|2,5}} = \frac{1}{17,884986} = 0,055913$$

Portanto:

$$R = 10.000(0,055913)$$

$$R = \text{Cr\$ } 559,13$$

b) $P = 10.000$

$n = 12$ meses

$i = 4\%$ a.m.

$$R = \frac{10.000}{a_{\overline{12}|4}}$$

$$R = \frac{10.000}{9,385074}$$

$$R = \text{Cr\$ } 1.065,52$$

c) $P = 10.000$

$n = 5$ anos

$i = 30\%$ a.a.

$$R = \frac{10.000}{a_{\overline{5}|30}}$$

$$R = \frac{10.000}{2,435570}$$

$$R = \text{Cr\$ } 4.105,82$$

7. Uma loja vende a geladeira $X$ por Cr$ 2.000,00 a vista ou financiada em 18 meses, a juros de 3,5% a.m. Qual será a prestação mensal, se não for dada entrada alguma e a primeira prestação vencer após 1 mês?

*Resolução:*

$P = 2.000$

$n = 18$ meses

$i = 3,5\%$ a.m.

$$R = \frac{P}{a_{\overline{n}|i}}$$

$$R = \frac{2.000}{a_{18\,|3,5}}$$

$$R = \frac{2.000}{13,189682}$$

$$R = \text{Cr\$ } 151,63$$

8. Numa agência de automóveis o preço de um carro, a vista, é de Cr$ 50.000,00. Qual é o valor da prestação mensal, se o carro for financiado em 24 meses, sem entrada, e a taxa de juros contratada for de 3% a.m.?

*Resolução:*

$P = 50.000$

$n = 24$ meses

$i = 3\%$ a.m.

$$R = \frac{P}{a_{n\,|i}}$$

$$R = \frac{50.000}{a_{24\,|3}}$$

$$R = \frac{50.000}{16,935542}$$

$$R = \text{Cr\$ } 2.952,37$$

9. A loja de confecções Roupa Certa Ltda vende um terno por Cr$ 3.000,00. No crediário é exigida uma entrada de 40% do valor da mercadoria e são cobrados juros de 5% a.m. Qual será o valor das prestações, se um cliente optar por 6 prestações mensais?

*Resolução:*

$P = 3.000$

$n = 6$

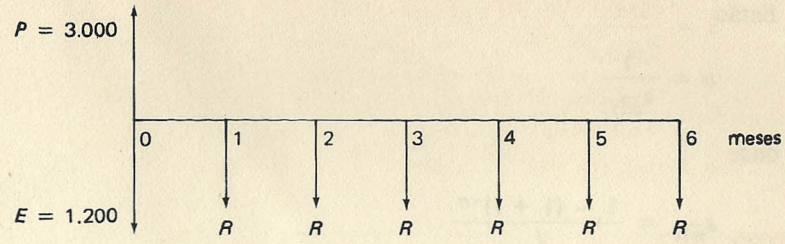
$i = 5\%$ a.m.

$E = 0,4 \cdot P$ (entrada)

$E = 0,4(3.000) = \text{Cr\$ } 1.200,00$

$P = E + R \cdot a_{n\,|i}$






$P - E =$ valor financiado

$P - E = R \cdot a_{n\,|i}$

$3.000 - 1.200 = R \cdot a_{6\,|5}$

O valor financiado é de apenas Cr$ 1.800,00. Portanto, a prestação é igual a:

$$R = \frac{1.800}{5,075692}$$

$$R = \text{Cr\$ } 354,63$$

10. O gerente financeiro de uma loja deseja estabelecer coeficientes de financiamento por unidade de capital emprestado. O resultado da multiplicação do coeficiente pelo valor financiado é igual à prestação mensal. Sabendo-se que a taxa de juros da loja é de 4% a.m., quais são os coeficientes unitários nas hipóteses de prazos abaixo?

a) 6 meses

b) 12 meses

c) 18 meses

d) 24 meses

*Resolução:*

Temos de calcular um coeficiente "$\alpha$" (alfa), tal que seu produto pelo capital financiado ($\alpha \cdot P$) seja igual à prestação mensal ($R$).

Portanto:

$$R = \alpha \cdot P$$

Mas

$$R = \frac{1}{a_{n\,|i}} \cdot P$$

Então

$$\alpha = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

onde

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Isto implica que

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \alpha = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

a) $i = 4\%$ a.m.

$n = 6$ meses

$a_{\overline{6}|4} = 5{,}242137$

$$\alpha = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{5{,}242137} = 0{,}190762$$

Por conseguinte, este será o fator que, aplicado ao valor financiado, dará o valor das 6 prestações mensais, considerando-se a taxa de 4% a.m.

*Exemplo:*

Preço a vista: Cr$ 10.000,00.

Pagamento: 6 prestações mensais.

Qual a prestação?

$R = 10.000(0{,}190762)$

$R =$ Cr$ 1.907,62

b) $i = 4\%$ a.m.

$n = 12$ meses

$a_{\overline{12}|4} = 9{,}385074$

$$\alpha = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{9{,}385074} = 0{,}106552$$

c) $i = 4\%$ a.m.

$n = 18$ meses

$a_{\overline{18}|4} = 12{,}659297$



$$\alpha = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{12{,}659297} = 0{,}078993$$

d) $i = 4\%$ a.m.

$n = 24$ meses

$a_{\overline{24}|4} = 15{,}246963$

$$\alpha = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{15{,}246963} = 0{,}065587$$

11. O preço a vista de um barco é de Cr$ 500.000,00. João comprou o barco por Cr$ 200.000,00 de entrada mais 12 prestações mensais de Cr$ 33.847,62. Qual é a taxa de juros cobrada neste financiamento?

*Resolução:*

$P' = 500.000 - 200.000 = 300.000$

$R = 33.847{,}62$

$n = 12$

$i = ?$

$P' = R \cdot a_{\overline{n}|i}$

$300.000 = 33.847{,}62 \cdot a_{\overline{n}|i}$

$a_{\overline{n}|i} = 8{,}863252$

*1ª solução:* pesquisa em tabelas

O número de períodos "$n$" é igual a 12, portanto devemos encontrar a taxa "$i$" que torna o fator $a_{\overline{12}|i} = 8{,}863252$.

Procurando no Apêndice de Tabelas, para $n = 12$, encontramos, à taxa de 5%, $a_{\overline{n}|i} = 8{,}863252$.

Então, $a_{\overline{12}|5} = 8{,}863252$; donde se conclui que a taxa de juros cobrada é de 5% a.m. (é mensal porque o número de períodos e as anuidades estão expressos em meses).

*2ª solução:* além da pesquisa em tabelas financeiras, podemos calcular o valor da taxa "$i$" por tentativa e erro.

Sabemos que:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Neste problema, tem-se

$$a_{12\rceil i} = 8{,}863252$$

Portanto, procura-se a taxa "$i$", tal que:

$$8{,}863252 = \frac{1 - (1 + i)^{-12}}{i}$$

Para cálculo de primeira aproximação da taxa verdadeira, utiliza-se a fórmula:

$$i_0 = \frac{1}{a_{\overline{n}\rceil i}} - \frac{a_{\overline{n}\rceil i}}{n^2}$$

$$i_0 = \frac{1}{8{,}863252} - \frac{8{,}863252}{12^2}$$

$$i_0 = 0{,}112825 - 0{,}061550$$

$$i_0 = 0{,}051275 \quad \text{ou} \quad 5{,}1275\% \text{ a.m.}$$

Testando este resultado, temos:

$$a_{12\rceil i_0} = \frac{1 - (1{,}051275)^{-12}}{0{,}051275}$$

$$a_{12\rceil 5{,}1275} = 8{,}799860$$

Como $8{,}799860 < 8{,}863252 \Longrightarrow i_0 > i$

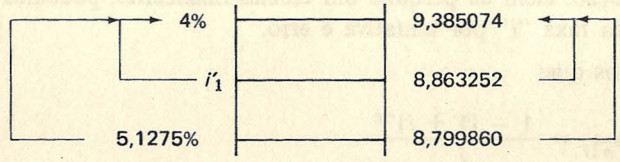
Portanto, 5,1275% é superior à taxa verdadeira "$i$", devendo-se testar uma taxa inferior a ela. Testando-se 4% a.m. e chamando-a de $i_1$, teremos:

$$a_{12\rceil 4} = \frac{1 - (1{,}04)^{-12}}{0{,}04}$$

$$a_{12\rceil 4} = 9{,}385074$$

Sendo $9{,}385074 > 8{,}863252 \Longrightarrow i_1 < i$

A taxa verdadeira "$i$" encontra-se entre $i_0$ e $i_1$. Dizemos que: $i_0 < i < i_1$. Fazendo-se a interpolação linear, vem:






$$\frac{i'_1 - 4}{5{,}1275 - 4} = \frac{8{,}863252 - 9{,}385074}{8{,}799860 - 9{,}385074}$$

$$\frac{i'_1 - 4}{1{,}1275} = \frac{-0{,}521822}{-0{,}585214}$$

$$i'_1 - 4 = 1{,}1275(0{,}891677)$$

$$i'_1 = 4 + 1{,}005366$$

$$\therefore \; i'_1 = 5{,}005366\% \text{ a.m.}$$

Testando o resultado, tem-se:

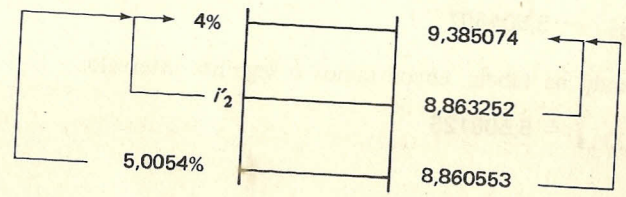
$$a_{12\rceil i'_1} = \frac{1 - (1{,}050054)^{-12}}{0{,}050054}$$

$$a_{12\rceil 5{,}0054} = 8{,}860553$$

Comparando: $8{,}860553 < 8{,}863252 \Longrightarrow i'_1 > i$.

Como a diferença entre os fatores é pequena, pode-se concluir que a taxa de juros é de 5,01% a.m. Caso se queira a taxa exata, deve-se prosseguir com as interpolações.

Assim, teríamos:




$$\frac{i'_2 - 4}{5{,}0054 - 4} = \frac{8{,}863252 - 9{,}385074}{8{,}860553 - 9{,}385074}$$

$$\therefore \; i'_2 = 4 + 1{,}000227$$

$$i'_2 = 5{,}000227\% \quad \text{ou} \quad i'_2 \cong 5{,}00\% \text{ a.m.}$$

Testando:

$$a_{12\rceil i_1} = \frac{1 - (1{,}05)^{-12}}{0{,}05}$$

$$a_{12\rceil 5} = 8{,}863252$$

Portanto, a taxa exata é de 5% a.m.

12. Uma loja de eletrodomésticos diz que sua taxa de juros é de 1,5% a.m. Nestas condições, numa compra de Cr$ 5.000,00, para ser paga em 6 prestações, o valor da prestação mensal será:

$$\text{Juros} = 5.000 \times 0{,}015 \times 6 = \text{Cr\$ } 450{,}00$$

$$\text{Prestação} = (5.000 + 450) : 6 = \text{Cr\$ } 908{,}33$$

Sabendo-se que a primeira prestação vence em 1 mês, pergunta-se qual é a taxa de juros real efetivamente cobrada.

*Resolução:*

$P = 5.000$

$R = 908{,}33$

$n = 6$

$i = ?$

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$5.000 = 908{,}33 \cdot a_{\overline{6}|i}$$

$$a_{\overline{6}|i} = \frac{5.000}{908{,}33}$$

$$a_{\overline{6}|i} = 5{,}504607$$

Procurando na tabela, encontramos o seguinte intervalo:

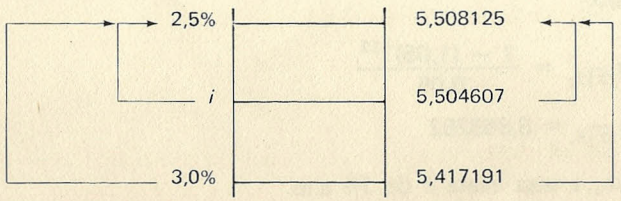
$$a_{\overline{6}|2{,}5} = 5{,}508125$$

e

$$a_{\overline{6}|3} = 5{,}417191$$

A taxa de juros real está contida neste intervalo, visto que: $5{,}508125 > 5{,}504607 > 5{,}417191$.

Interpolando linearmente, vem:






$$\frac{i - 2{,}5}{3{,}0 - 2{,}5} = \frac{5{,}504607 - 5{,}508125}{5{,}417191 - 5{,}508125}$$

$$\frac{i - 2{,}5}{0{,}5} = \frac{-0{,}003518}{-0{,}090934}$$

$$\therefore i = 2{,}5 + 0{,}5(0{,}038687)$$

$$i = 2{,}519343\% \quad \text{ou} \quad i \cong 2{,}519\% \text{ a.m.}$$

Testando:

$$a_{\overline{6}|2{,}519} = \frac{1 - (1{,}02519)^{-6}}{0{,}02519}$$

$$a_{\overline{6}|2{,}519} = 5{,}504627$$

Comparando: $5{,}504627 \cong 5{,}504607$, portanto a taxa de juros real cobrada é de 2,519% a.m. ou $\cong$ 2,52% a.m.

13. Uma financeira publica que seus coeficientes para financiamento de carros, em 24 meses, são:

| *Carros 0-km* | *Carros usados* |
|---|---|
| a) 0,06480 | b) 0,06815 |

Então, se uma pessoa quiser financiar Cr$ 20.000,00 em 24 meses na compra de um carro zero quilômetro, deverá pagar prestações mensais de:

$$R = 20.000 \times 0{,}06480$$

$$R = \text{Cr\$ } 1.296{,}00$$

Qual é a taxa de juros de cada coeficiente?

*Resolução:*

Sabemos que:

$$R = P \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

Então, o fator (coeficiente) publicado pela financeira é igual a $\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$.

a) *Coeficiente para Carros 0-Km:*

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = 0{,}06480$$

$n = 24$ meses

$i = ?$

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = 0{,}06480 \Longrightarrow a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{0{,}06480} = 15{,}432099$$

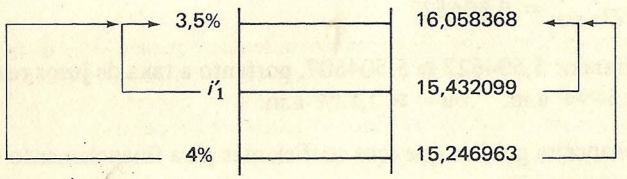
$$a_{\overline{24}|i} = 15{,}432099$$

Procurando na tabela, encontramos o seguinte intervalo de taxas:

$$a_{\overline{24}|3,5} = 16{,}058368$$

$$a_{\overline{24}|4} = 15{,}246963$$

Interpolando linearmente, vem:




$$\frac{i'_1 - 3{,}5}{4 - 3{,}5} = \frac{15{,}432099 - 16{,}058368}{15{,}246963 - 16{,}058368}$$

$$\frac{i'_1 - 3{,}5}{0{,}5} = \frac{-0{,}626269}{-0{,}811405}$$

$$i'_1 = 3{,}5 + 0{,}5\,(0{,}771833)$$

$$\therefore\ i'_1 = 3{,}886\%\ \text{a.m.}$$

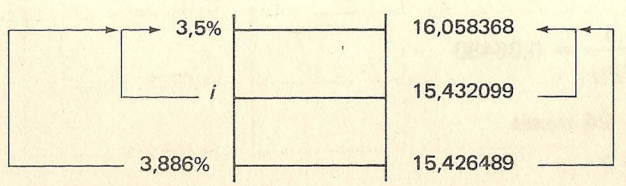
Testando:

$$a_{\overline{24}|3,886} = \frac{1 - (1{,}03886)^{-24}}{\cdot\ 0{,}03886}$$

$$a_{\overline{24}|3,886} = 15{,}426489$$

Comparando: $15{,}426489 < 15{,}432099 \Longrightarrow 3{,}886 > i$, onde $i$ é a taxa verdadeira.

Procedendo-se uma segunda interpolação linear, teremos:






$$\frac{i - 3{,}5}{3{,}886 - 3{,}5} = \frac{15{,}432099 - 16{,}058368}{15{,}426489 - 16{,}058368}$$

$$\frac{i - 3{,}5}{0{,}386} = \frac{-0{,}626269}{-0{,}631879}$$

$$i = 3{,}5 + 0{,}386(0{,}991122)\ \therefore\ i = 3{,}883\%\ \text{a.m.}$$

Testando:

$$a_{\overline{24}|3,883} = \frac{1 - (1{,}03883)^{-24}}{0{,}03883} \Longrightarrow a_{\overline{24}|3,883} = 15{,}431256$$

Comparando: $15{,}431256 \cong 15{,}432099$. Portanto a taxa de juros cobrada é de 3,88% a.m.

*Nota:* como pôde ser visto pelos exemplos anteriores, quando estamos interpolando taxas em intervalos pequenos, a primeira interpolação linear já fornece excelente aproximação da taxa verdadeira. Maior número de interpolações será justificável quando a precisão for dado relevante na solução do problema.

b) *Coeficiente para Carros Usados:*

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = 0{,}06815$$

$$n = 24\ \text{meses}$$

$$i = ?$$

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = 0{,}06815 \Longrightarrow a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{0{,}06815} = 14{,}673514$$

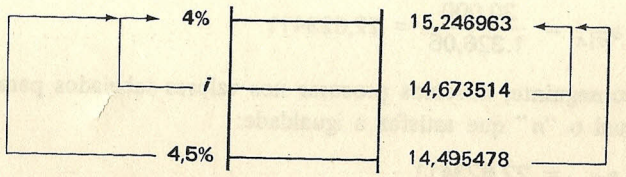
$$a_{\overline{24}|i} = 14{,}673514$$

Procurando na tabela, encontramos o seguinte intervalo de taxas:

$$a_{\overline{24}|4} = 15{,}246963$$

$$a_{\overline{24}|4,5} = 14{,}495478$$

Processando a interpolação linear, vem:



$$\frac{i-4}{4,5-4} = \frac{14,673514 - 15,246963}{14,495478 - 15,246963}$$

$$\frac{i-4}{0,5} = \frac{-0,573449}{-0,751485}$$

$$i = 4 + 0,5(0,763088)$$

$$\therefore\ i = 4,3815 \quad \text{ou} \quad i \cong 4,38\%\ \text{a.m.}$$

A taxa verdadeira, obtida por interpolações sucessivas, é de 4,378063% a.m. ou ≅ 4,38% a.m., conforme aproximação resultante da primeira interpolação.

14. João, conversando com um amigo, conta-lhe que fez o "melhor negócio do mundo", pois comprou uma motocicleta, cujo valor a vista era de Cr$ 30.000,00, em prestações mensais de Cr$ 1.326,06, sem dar entrada alguma. João achou que o negócio fora bom porque, apesar de o vendedor dizer-lhe que a taxa de juros era de 4% a.m., o valor da prestação era baixo. Seu amigo perguntou-lhe em quantas prestações comprara e ele respondeu que não sabia. Calcule o número de prestações.

*Resolução:*

$P = 30.000$

$R = 1.326,06$

$i = 4\%$ a.m.

$n = ?$

Sabe-se que:

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Portanto:

$$30.000 = 1.326,06 \cdot a_{\overline{n}|4}$$

então:

$$a_{\overline{n}|4} = \frac{30.000}{1.326,06} = 22,623411$$

Por conseguinte, devemos procurar nos valores tabelados para a taxa 4% qual o "$n$" que satisfaz a igualdade:

$$a_{\overline{n}|4} = 22,623411$$



Neste caso, encontraremos que, para $n = 60$

$$a_{\overline{60}|4} = 22,623490$$

sendo este o fator mais próximo do valor procurado. A diferença deve-se ao arredondamento do valor da prestação.

Não se tendo tabelas financeiras, pode-se resolver através de logaritmos, pois:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{n}|4} = \frac{1 - (1,04)^{-n}}{0,04}$$

$$0,04(22,623411) = 1 - (1,04)^{-n}$$

$$0,904936 = 1 - (1,04)^{-n}$$

$$1 - 0,904936 = (1,04)^{-n}$$

$$0,095064 = (1,04)^{-n}$$

$$\frac{1}{0,095064} = (1,04)^{n}$$

$$10,519278 = (1,04)^{n}$$

$$\log 10,519278 = n \log 1,04$$

$$1,021986 = n\,(0,017033)$$

$$n = \frac{1,021986}{0,017033}$$

$$\therefore\ n = 59,999 \quad \text{ou} \quad n \cong 60\ \text{meses}$$

15. Um blusão de couro, importado, é vendido por Cr$ 5.000,00 a vista ou por Cr$ 1.000,00 de entrada mais prestações mensais de Cr$ 480,97. Sabendo-se que a taxa de juros considerada é de 3,5% a.m., qual é o número de prestações?

*Resolução:*

$P' = 5.000 - 1.000 =$ Cr$ 4.000,00 (valor financiado)

$R = 480,97$

$i = 3,5\%$ a.m.

$n = ?$

$$P' = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$4.000 = 480{,}97 \cdot a_{\overline{n}|3,5}$$

$$a_{\overline{n}|3,5} = \frac{4.000}{480{,}97} = 8{,}316527$$

Procurando na tabela para a taxa de 3,5%, encontramos:

$$a_{\overline{9}|3,5} = 7{,}607687$$

$$a_{\overline{10}|3,5} = 8{,}316605$$

$$a_{\overline{11}|3,5} = 9{,}001551$$

Donde se conclui que $n = 10$ meses, visto ser este o fator mais aproximado do valor calculado (8,316527).

Resolvendo por logaritmos, teremos:

$$a_{\overline{n}|3,5} = \frac{1 - (1{,}035)^{-n}}{0{,}035}$$

$$n = -\left\{\frac{\log\,[1 - 0{,}035\,(8{,}316527)]}{\log\,(1{,}035)}\right\}$$

$$n = -\left(\frac{\log 0{,}708922}{\log 1{,}035}\right)$$

$$n = -\left(\frac{-\,0{,}149402}{0{,}014940}\right)$$

$$\therefore\ n = 10 \text{ meses}$$

16. Uma imobiliária, especializada na venda de apartamentos usados, põe à venda uma "kitchenette" por Cr$ 120.000,00 a vista ou em 60 meses a prazo, com uma entrada de Cr$ 30.000,00. Qual é o valor da prestação mensal, se foi considerada Tabela Price 12% a.a.? (Ver item 3 do Apêndice.)

*Resolução:*

Como a taxa de juros é Tabela Price 12% a.a. e as prestações serão mensais, então a taxa de juros mensal será de:

$$\frac{12\%\text{ a.a.}}{12\text{ meses}} = 1\%\text{ a.m.}$$

Isto porque na Tabela Price as taxas são apresentadas sempre em termos anuais *nominais*.

$P' = 120.000 - 30.000 = 90.000$ (valor a ser financiado)



$i = 1\%$ a.m.

$n = 60$ meses

$R = ?$

$$R = P \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

$$R = 90.000 \cdot \frac{1}{a_{\overline{60}|1}}$$

$$R = \frac{90.000}{44{,}955038}$$

$R =$ Cr$ 2.002,00

17. A venda de um sítio foi efetuada mediante entrada de Cr$ 50.000,00 mais 24 prestações trimestrais de Cr$ 3.500,00. Qual é o preço a vista do sítio, se nestas operações for usual utilizar-se Tabela Price 24% a.a.? (Ver item 3 do Apêndice.)

*Resolução:*

Tabela Price 24% a.a. $\Longrightarrow i = \frac{24\%}{4} = 6\%$ a.t.

$E = 50.000$

$R = 3.500$

$i = 6\%$ a.t.

$n = 24$ trimestres

$$P = E + R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

onde $P$ é o valor atual ou o preço a vista, à taxa $i$.

$$P = 50.000 + 3.500 \cdot a_{\overline{24}|6}$$

$$P = 50.000 + 3.500\,(12{,}550358)$$

$P =$ Cr$ 93.926,25

18. Numa instituição em que se cobram juros Tabela Price 60% a.a., para cada Cr$ 100,00 emprestados são exigidas prestações mensais de Cr$ 11,28. Qual é o número de prestações? (Ver item 3 do Apêndice.)

*Resolução:*

Tabela Price 60% a.a. $\Longrightarrow i = \frac{60\%}{12} = 5\%$ a.m.

$P = 100$

$R = 11{,}28$

$i = 5\%$ a.m.

$n = ?$

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$100 = 11{,}28 \cdot a_{\overline{n}|5}$$

$$a_{\overline{n}|5} = \frac{100}{11{,}28} = 8{,}865248$$

Procurando nos valores tabelados para 5%, tem-se:

$$a_{\overline{11}|5} = 8{,}306414$$

$$a_{\overline{12}|5} = 8{,}863252$$

$$a_{\overline{13}|5} = 9{,}393573$$

O número de períodos é aproximadamente de 12 meses.

Calculando o "$n$" por logaritmos, temos:

$$a_{\overline{n}|5} = \frac{1 - (1{,}05)^{-n}}{0{,}05}$$

$$n = -\left\{\frac{\log\,[1 - 0{,}05\,(8{,}865248)]}{\log\,1{,}05}\right\}$$

$$n = -\left(\frac{-0{,}254349}{0{,}021189}\right)$$

$$\therefore\ n = 12 \text{ meses}$$

19. Qual é o montante de uma anuidade periódica de Cr$ 500,00, nas hipóteses abaixo:

| Taxa de juros | — | Prazo |
|---|---|---|
| a) 2% a.m. | — | 24 meses |
| b) 3% a.b. | — | 12 bimestres |
| c) 6% a.t. | — | 5 anos |
| d) 25% a.a. | — | 10 anos |

*Resolução:*

Para se calcular o montante de uma série periódica de $n$ termos, à taxa temos a fórmula:



$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

onde:

$S$ = montante

$R$ = valor do termo (do depósito ou do pagamento)

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

O fator $S_{\overline{n}|i}$ encontra-se tabelado para as taxas mais usuais (ver Apêndice de Tabelas) ou então pode ser calculado conforme expressão acima.

a) $R = 500$

$i = 2\%$ a.m.

$n = 24$ meses

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

Na tabela para $i = 2\%$ encontramos que

$$S_{\overline{24}|2} = 30{,}421863$$

O montante ($S$) será igual a:

$$S = 500 \cdot S_{\overline{24}|2}$$

$$S = 500\,(30{,}421863)$$

$$S = \text{Cr\$ } 15.210{,}93$$

O cálculo do fator $S_{\overline{n}|i}$ pode ser feito:

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$S_{\overline{24}|2} = \frac{(1{,}02)^{24} - 1}{0{,}02}$$

$$S_{\overline{24}|2} = \frac{1{,}60843725 - 1}{0{,}02}$$

$$S_{\overline{24}|2} = \frac{0{,}60843725}{0{,}02} = 30{,}421863$$

b) $R = 500$

$i = 3\%$ a.b.

$n = 12$ bimestres

$S = 500 \cdot S_{\overline{12}|3}$

$S = 500\,(14{,}192030)$

$S = \text{Cr\$ } 7.096{,}01$

c) $R = 500$

$i = 6\%$ a.t.

$n = 20$ trimestres (5 anos)

$S = 500 \cdot S_{\overline{20}|6}$

$S = 500\,(36{,}785591)$

$S = \text{Cr\$ } 18.392{,}80$

d) $R = 500$

$i = 25\%$ a.a.

$n = 10$ anos

$S = 500 \cdot S_{\overline{10}|25}$

$S = 500\,(33{,}252903)$

$S = \text{Cr\$ } 16.626{,}45$

20. Qual é o depósito trimestral durante 4 anos consecutivos que produz o montante de Cr$ 200.000,00 após o último depósito? Considerar as taxas de juros trimestrais abaixo:

a) 5% a.t.

b) 10% a.t.

c) 15% a.t.

*Resolução:*

Temos que:

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

Portanto:

$$R = \frac{S}{S_{\overline{n}|i}} \quad \text{ou} \quad R = S \cdot \frac{1}{S_{\overline{n}|i}}$$

**Nota:** Algumas tabelas financeiras apresentam, além do fator $S_{\overline{n}|i}$, o seu inverso, ou seja, $\frac{1}{S_{\overline{n}|i}}$.



a) $S = 200.000$

$i = 5\%$ a.t.

$n = 16$ trimestres (4 anos)

$$R = \frac{200.000}{S_{\overline{16}|5}}$$

$$R = \frac{200.000}{23{,}657492}$$

$R = \text{Cr\$ } 8.453{,}98$

b) $S = 200.000$

$i = 10\%$ a.t.

$n = 16$ trimestres

$$R = \frac{200.000}{S_{\overline{16}|10}}$$

$$R = \frac{200.000}{35{,}949730}$$

$R = \text{Cr\$ } 5.563{,}32.$

c) $S = 200.000$

$i = 15\%$ a.t.

$n = 16$ trimestres

$$R = \frac{200.000}{S_{\overline{16}|15}}$$

$$R = \frac{200.000}{55{,}717472}$$

$R = \text{Cr\$ } 3.589{,}54$

21. O pai de um estudante efetua mensalmente, durante 36 meses, depósitos de Cr$ 200,00 em um banco que paga 2% a.m. sobre o saldo credor. Este dinheiro se destina ao custeamento dos estudos superiores do filho. Qual será o montante acumulado após ser efetuado o último depósito?

*Resolução:*

$R = 200$

$i = 2\%$ a.m.

$n = 36$ meses

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

$$S = 200 \cdot S_{\overline{36}|2}$$

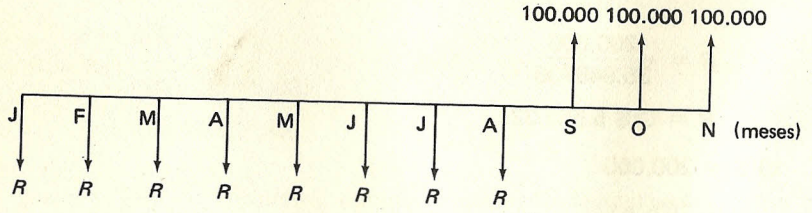
$$S = 200\,(51{,}994367)$$

$$S = \text{Cr\$ } 10.398{,}87$$

22. Uma pessoa, planejando a construção de uma casa, prevê dispêndios mensais de Cr$ 100.000,00 nos meses de setembro, outubro e novembro. Quanto deve ser depositado mensalmente de janeiro a agosto, do mesmo ano, para que seja possível efetuar tais retiradas? Considerar remuneração de 3% a.m. sobre os depósitos.

*Resolução:*

Temos o seguinte problema:




Portanto, o montante dos 8 depósitos deve ser igual ao valor atual das 3 retiradas, à taxa de 3% a.m.

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

Segue-se, por conseguinte, que:

$$R \cdot S_{\overline{8}|3} = R \cdot a_{\overline{3}|3}$$

$$R \cdot S_{\overline{8}|3} = 100.000 \cdot a_{\overline{3}|3}$$

$$R\,(8{,}892336) = 100.000\,(2{,}828611)$$

$$R\,(8{,}892336) = 282.861{,}10$$

$$R = \frac{282.861{,}10}{8{,}892336}$$

$$\therefore\ R = \text{Cr\$ } 31.809{,}54$$



23. O corretor prometeu a um cliente que, se ele efetuasse 12 depósitos trimestrais de Cr$ 1.050,00, após o último depósito ele teria Cr$ 20.000,00. Que taxa de juros o corretor está oferecendo ao cliente?

*Resolução:*

$S = 20.000$

$R = 1.050$

$n = 12$ trimestres

$i = ?$

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

$$20.000 = 1.050 \cdot S_{\overline{12}|i}$$

$$\frac{20.000}{1.050} = S_{\overline{12}|i}$$

$$19{,}047619 = S_{\overline{12}|i}$$

Procurando-se nas tabelas para $n = 12$, encontramos o seguinte intervalo:

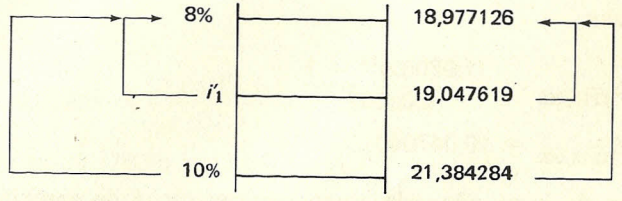
$$S_{\overline{12}|8} = 18{,}977126$$

$$S_{\overline{12}|10} = 21{,}384284$$

Portanto, a taxa $i$ se acha neste intervalo:

$$18{,}977126 < 19{,}047619 < 21{,}384284 \iff 8\% < i < 10\%$$

Interpolando linearmente, vem:




$$\frac{i'_1 - 8}{10 - 8} = \frac{19{,}047619 - 18{,}977126}{21{,}384284 - 18{,}977126}$$

$$\frac{i'_1 - 8}{2} = \frac{0{,}070493}{2{,}407158}$$

$i'_1 = 8 + 2\,(0{,}029285)$

$\therefore\ i'_1 = 8{,}059\%$ a.t.

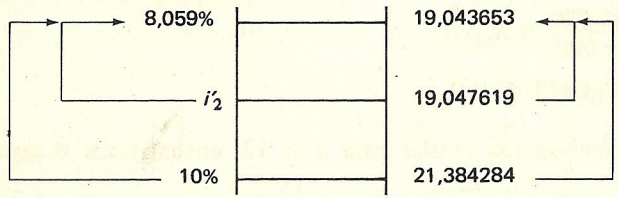
Testando:

$$S_{\overline{12}|8{,}059} = \frac{(1{,}08059)^{12} - 1}{0{,}08059}$$

$$S_{\overline{12}|8{,}059} = \frac{2{,}534728 - 1}{0{,}08059} = 19{,}043653$$

Comparando: $19{,}043653 < 19{,}047619 \Longleftrightarrow 8{,}059\% < i'_1$

Processando a segunda interpolação:




$$\frac{i'_2 - 8{,}059}{10 - 8{,}059} = \frac{19{,}047619 - 19{,}043653}{21{,}384284 - 19{,}043653}$$

$$\frac{i'_2 - 8{,}059}{1{,}941} = \frac{0{,}003966}{2{,}340631}$$

$i'_2 = 8{,}059 + 1{,}941\,(0{,}001694)$

$\therefore\ i'_2 = 8{,}062$

Testando:

$$S_{\overline{12}|8{,}062} = \frac{(1{,}08062)^{12} - 1}{0{,}08062}$$

$$S_{\overline{12}|8{,}062} = 19{,}047040$$

A taxa de juros oferecida como remuneração é de aproximadamente 8,06% a.t., resultado este que já fora obtido na primeira interpolação, pois 8,059% ≅ 8,06%. Isto porque o intervalo entre as taxas é relativamente pequeno (a taxa de juros exata é de: 8,062512% ≅ 8,06% a.t.).

24. Quantos depósitos bimestrais de Cr$ 1.000,00 serão necessários para que, se a remuneração for de 4% a.b., se tenha Cr$ 29.778,08?



*Resolução:*

$S = 29.778{,}08$

$R = 1.000{,}00$

$i = 4\%$ a.b.

$n = ?$

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

$$29.778{,}08 = 1.000 \cdot S_{\overline{n}|4}$$

$$S_{\overline{n}|4} = \frac{29.778{,}08}{1.000}$$

$$S_{\overline{n}|4} = 29{,}77808$$

Procurando-se na tabela para $i = 4\%$, tem-se:

$S_{\overline{19}|4} = 27{,}671229$

$S_{\overline{20}|4} = 29{,}778079$

$S_{\overline{21}|4} = 31{,}969202$

Por conseguinte, o número de períodos é de 20 bimestres, não havendo neste caso necessidade de interpolações, pois o fator calculado e o tabelado aproximadamente coincidem.

O cálculo do número de períodos também poderia ser feito através de logaritmos, pois:

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$S_{\overline{n}|4} = 29{,}77808$$

Então:

$$29{,}77808 = \frac{(1{,}04)^n - 1}{0{,}04}$$

$$0{,}04\,(29{,}77808) = (1{,}04)^n - 1$$

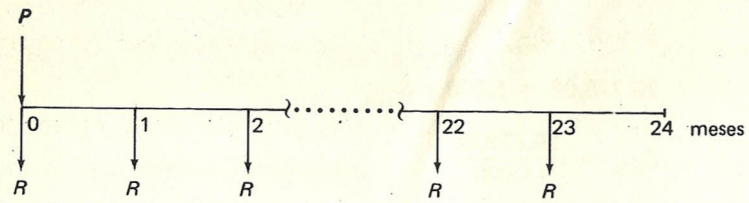
$$1 + 1{,}191123 = (1{,}04)n$$

$$n = \frac{\log 2{,}191123}{\log 1{,}04}$$

$$n = \frac{0{,}340667}{0{,}017033} \quad \therefore\ n = 20 \text{ bimestres}$$

25. Uma dona de casa compra um televisor em cores em 24 prestações de Cr$ 630,64, sendo que a primeira prestação é dada como entrada. Sabendo-se que a taxa de mercado é de 4% a.m., qual seria o valor do televisor a vista?

*Resolução:*




$$P = R + R \cdot a_{n-\overline{1}|i}$$

$$P = R(1 + a_{n-\overline{1}|i})$$

$R = 630,64$

$n = 24$ meses

$i = 4\%$ a.m.

$$P = 630,64\,(1 + a_{24-\overline{1}|4})$$

$$P = 630,64\,(1 + a_{\overline{23}|4})$$

$$P = 630,64\,(1 + 14,856842)$$

$$P = 630,64\,(15,856842)$$

$$P = \text{Cr\$ } 9.999,96$$

26. Um amigo propõe a outro o seguinte problema: O quociente entre a prestação e o valor atual é de 0,102963. Se a prestação for de Cr$ 150,00 e a taxa de juros de 6% ao período, qual será o montante desta anuidade?

*Resolução:*

Temos que:

$R = 150$

$i = 6\%$

$$\frac{R}{P} = 0,102963 \Longrightarrow \frac{150}{P} = 0,102963$$



então:

$$P = \frac{150}{0,102963} = \text{Cr\$ } 1.456,83$$

Como temos $P$, $R$ e $i$, bastaria calcular o número de períodos e então poder-se-ia calcular o valor do montante ($S$).

Contudo, neste problema pode-se aplicar a seguinte relação (ver Apêndice a este capítulo):

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{S_{\overline{n}|i}} + i$$

e

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

logo:

$$\frac{R}{P} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

Portanto:

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|6}} = \frac{1}{S_{\overline{n}|6}} + 0,06$$

$$0,102963 = \frac{1}{S_{\overline{n}|6}} + 0,06$$

$$0,102963 - 0,06 = \frac{1}{S_{\overline{n}|6}}$$

$$0,042963 = \frac{1}{S_{\overline{n}|6}}$$

$$S_{\overline{n}|6} = \frac{1}{0,042963}$$

$$S_{\overline{n}|6} = 23,275842$$

Por conseguinte:

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

$$S = 150\,(23,275842)$$

$$S = \text{Cr\$ } 3.491,38$$

## 5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcular o valor atual de uma anuidade periódica de Cr$ 1.000,00, nas hipóteses abaixo:

| Taxa de Juros | Prazo |
|---|---|
| a) 2% a.m. | 24 meses |
| b) 3% a.m. | 12 meses |
| c) 2,5% a.m. | 36 meses |
| d) 10% a.t. | 8 trimestres |
| e) 15% a.s. | 5 semestres |

2. Qual é o preço a vista de uma mercadoria cuja prestação mensal é de Cr$ 200,00, se as taxas e prazos abaixo forem considerados:

   a) 2,5% a.m. – 18 meses

   b) 3,0% a.m. – 18 meses

   c) 2,0% a.m. – 24 meses

   d) 4,0% a.m. – 24 meses

3. Um terreno é vendido por Cr$ 10.000,00 de entrada e 36 prestações mensais de Cr$ 500,00. Sabendo-se que a taxa de juros corrente no mercado é de 2,5% a.m., até que preço vale a pena comprar o terreno a vista?

4. Numa seção de classificados anuncia-se uma casa por Cr$ 250.000,00 a vista ou em 4 prestações trimestrais de Cr$ 77.600,00. Qual é a melhor opção de compra, uma vez que a taxa de juros corrente é de 10% a.t.?

5. Um magazine tem como política de vendas oferecer um desconto de 10% nas compras a vista. Nas vendas a prazo, os clientes deverão pagar 12 prestações iguais a 10% do valor a vista. Supondo-se que a taxa de juros corrente seja de 2,5% a.m., qual é a melhor alternativa para o comprador?

6. Calcular a prestação referente a uma mercadoria, cujo preço a vista é de Cr$ 10.000,00, caso ocorram as seguintes hipóteses sobre as taxas e respectivos prazos:

| Taxa de Juros | Prazo |
|---|---|
| a) 2,5% a.m. | 12 meses |
| b) 2,5% a.m. | 24 meses |
| c) 3,0% a.m. | 12 meses |
| d) 3,0% a.m. | 36 meses |
| e) 10,0% a.t. | 10 trimestres |
| f) 10,0% a.a. | 2 anos |

7. Um sítio é posto à venda por Cr$ 300.000,00 a vista, ou a prazo nas seguintes condições: 10% de entrada e o restante em 50 meses, juros de 3% a.m. Qual é o valor das prestações?



8. O gerente financeiro de uma cadeia de lojas que operam com crediário deseja estabelecer fatores que serão aplicados ao preço a vista para cálculo da prestação mensal. A taxa de juros da empresa é de 2% a.m.; portanto, quais são estes fatores por unidade de capital, nos prazos abaixo:

   a) 6 meses

   b) 12 meses

   c) 18 meses

   d) 24 meses

   e) 30 meses

   f) 36 meses

9. Uma firma revendedora de automóveis usados oferece o seguinte plano na venda de um carro, modelo 1952:

   a) Entrada = Cr$ 1.000,00 mais 6 prestações mensais de Cr$ 181,55.

   b) Entrada = Cr$ 500,00 mais 12 prestações mensais de Cr$ 148,01.

   Sendo a taxa de mercado 2% a.m., qual é a melhor alternativa?

10. O preço de uma motocicleta é de Cr$ 20.000,00 a vista ou, caso o cliente deseje as facilidades do crediário, poderá pagá-la a prazo. No segundo caso, exigem-se 24 prestações mensais de Cr$ 1.245,46. Que taxa de juros mensal está sendo cobrada?

11. Um barco é vendido por Cr$ 150.000,00 a vista ou por Cr$ 30.000,00 de entrada e mais 8 prestações quadrimestrais de Cr$ 26.742,01. Que taxa quadrimestral está sendo considerada?

12. Certa agência de viagens diz financiar a juros de 1,2% a.m. Sua sistemática no financiamento de Cr$ 10.000,00 em 12 meses é a seguinte:

   1,2% × 12 meses = 14,4% a.a.

   10.000 (1,144) = Cr$ 11.440,00

   11.440 : 12 = Cr$ 953,33

   Portanto, o cliente irá pagar 12 prestações de Cr$ 953,33. A taxa de juros é realmente de 1,2% a.m.?

13. O banco CEF para um financiamento em 12 meses propõe o seguinte esquema:

   prestação mensal = (valor do financiamento) : 12

   juros do banco = 14% do valor do financiamento

   valor recebido = (valor do financiamento) – (juros do banco)

   Qual é a taxa de juros cobrada?

14. Uma financeira publica em um jornal que seus coeficientes para cada unidade de capital emprestado, de acordo com os prazos, são:

| Prazo | Coeficiente |
|---|---|
| a) 6 meses | 0,18707 |
| b) 12 meses | 0,10086 |

c) 18 meses — 0,07230

d) 24 meses — 0,05819

e) 30 meses — 0,04992

f) 36 meses — 0,04455

Então, o financiamento de Cr$ 1.000,00 por 12 meses resultará em 12 prestações de 1.000 × 0,10086 = Cr$ 100,86. Qual é a taxa de juro mensal de cada coeficiente?

15. Se uma financeira apresentar o coeficiente de 0,09749 para 12 prestações mensais e além disso cobrar 2% sobre o valor financiado, a título de despesas administrativas (desconto este que será feito no ato), qual será a taxa de juros mensal efetiva?

16. Em quantas prestações mensais de Cr$ 1.004,62 será pago um título de um clube de campo, se seu valor a vista for de Cr$ 10.000,00 e a taxa contratada for de 3,0% a.m.?

17. Uma loja de móveis sob encomenda tem como política pedir 20% do valor dos móveis contratados como entrada. Os móveis são entregues 1 mês após o contrato, quando então o cliente pode saldar o restante, obtendo 5% de abatimento sobre o valor do contrato. Caso opte pelo pagamento a prazo, poderá saldar o restante em quatro parcelas iguais, vencendo uma na entrega e as demais nos três meses seguintes. Qual é a taxa de juros implícita nesta operação?

18. Um apartamento é vendido por Cr$ 1.000.000,00 a vista ou por 50% de entrada e o restante em 60 meses, Tabela Price 12% a.a. Qual é o valor das prestações? (Ver item 3 do Apêndice.)

19. O preço a vista de uma fazenda é de Cr$ 450.000,00 e como opção o proprietário pede 20% de entrada e o saldo em 6 anos, em prestações trimestrais. Os juros são Tabela Price 12% a.a. Qual é o valor das prestações trimestrais? (Ver item 3 do Apêndice.)

20. Uma imobiliária, planejando a venda de um loteamento e sabendo que deverá vender a prazo, encontra-se em dificuldade, pois quer ganhar 2,5% a.m. e nesta região o usual é Tabela Price 12% a.a. Um amigo sugere ao gerente financeiro da imobiliária que aumente o valor do preço a vista de tal modo que garanta juros de 2,5% a.m., após aplicação da Tabela Price 12% a.a. Que percentagem deve acrescer no valor a vista para cada um dos prazos abaixo:

a) 24 meses

b) 48 meses

c) 60 meses

(Ver item 3 do Apêndice.)

21. Que taxa anual, Tabela Price, será cobrada em um financiamento de Cr$ 5.000,00, pelo qual o cliente pagou 30 prestações mensais de Cr$ 208,20? (Ver item 3 do Apêndice.)

22. Qual é a taxa efetiva anual referente à Tabela Price 10% a.a., se as amortizações forem:



a) mensais

b) bimensais

c) trimestrais

d) quadrimestrais

e) semestrais

(Ver item 3 do Apêndice.)

23. Se uma imobiliária deseja ganhar 30% a.a., que taxas anuais, Tabela Price, deverá publicar, caso as amortizações sejam:

a) mensais

b) trimestrais

c) quadrimestrais

d) semestrais

(Ver item 3 do Apêndice.)

24. Que montante obterá uma pessoa que deposite periodicamente Cr$ 100,00, conforme prazo e taxas a seguir:

a) 24 meses – 1% a.m.

b) 60 meses – 5% a.m.

c) 10 trimestres – 15% a.t.

d) 20 semestres – 20% a.s.

25. Quanto se deverá depositar mensalmente para que, ao fim de 5 anos, não se processando nenhuma retirada, se tenha Cr$ 50.000,00. Considerar que a instituição paga 2,5% a.m. sobre o saldo credor.

26. Uma pessoa pretende comprar um apartamento no valor de Cr$ 300.000,00 ao fim de 2 anos. Sabendo-se que hoje ela possui Cr$ 100.000,00 em dinheiro, a que taxa mensal deve aplicar esta poupança e os 24 depósitos mensais de Cr$ 2.809,48 que pretende fazer, para que seu objetivo seja alcançado?

**Nota:** Resolver por tentativa e erro.

27. Certo executivo, pretendendo viajar durante 12 meses, resolve fazer 6 depósitos mensais em uma financeira, para que sua esposa possa efetuar 12 retiradas mensais de Cr$ 20.000,00, durante o período de sua viagem. A primeira retirada ocorrerá 1 mês após o último depósito. Se a financeira paga 3% a.m., de quanto devem ser os depósitos?

28. Se uma pessoa efetuar 60 depósitos mensais de Cr$ 200,00 em um banco que paga 2,5% sobre o saldo credor, quanto poderá retirar em 60 meses? (Considerar 1ª retirada um mês após o último depósito.)

29. O quociente entre uma prestação e o valor atual das prestações é de 0,05591 à taxa de 2,5% a.m. Se o montante das prestações, à mesma taxa e pelo mesmo prazo, for igual a Cr$ 9.043,63, qual é o valor atual?

**Nota:** Ver exercício resolvido nº 26.

30. Uma pessoa aplicou Cr$ 15.000,00 e após 3 anos recebeu a soma total de Cr$ 61.558,99. Que depósitos mensais nesse período produziriam a mesma soma, se os juros sobre saldo credor fossem beneficiados com a mesma taxa da primeira hipótese?

**Respostas**

1. a) Cr$ 18.913,93
   b) Cr$ 9.954,00
   c) Cr$ 23.556,25
   d) Cr$ 5.334,93
   e) Cr$ 3.352,16
2. a) Cr$ 2.870,67
   b) Cr$ 2.750,70
   c) Cr$ 3.782,79
   d) Cr$ 3.049,39
3. O preço a vista deve ser inferior a Cr$ 21.778,13. Neste valor é indiferente comprar a vista ou a prazo à taxa de juros dada.
4. É melhor comprar a prazo, pois seu valor atual é menor (Cr$ 245.981,56).
5. É melhor comprar a vista, beneficiando-se do desconto de 10%. O valor atual das prestações é superior ao da compra a vista.
6. a) Cr$ 974,87
   b) Cr$ 559,13
   c) Cr$ 1.004,62
   d) Cr$ 458,04
   e) Cr$ 1.627,45
   f) Cr$ 5.761,90
7. Cr$ 10.493,68.
8. a) 0,178526
   b) 0,094560
   c) 0,066702
   d) 0,052871
   e) 0,044650
   f) 0,039233
9. Melhor opção é o plano *a*, pois possui menor valor atual.
10. 3,5% a.m.
11. 15% a.q.
12. 2,13% a.m.
13. 2,4% a.m.
14. a) 3,40% a.m.
    b) 3,07% a.m.
    c) 2,93% a.m.
    d) 2,86% a.m.
    e) 2,83% a.m.
    f) 2,82% a.m.
15. 2,84% a.m.
16. 12 prestações.
17. 4,48% a.m.
18. Cr$ 11.122,22.
19. Cr$ 21.257,07.
20. a) 18,78%
    b) 36,73%
    c) 45,44%
21. 18% a.a.
22. a) 10,47% a.a.
    b) 10,43% a.a.
    c) 10,38% a.a.
    d) 10,34% a.a.
    e) 10,25% a.a.
23. a) 26,53% a.a.
    b) 27,12% a.a.
    c) 27,42% a.a.
    d) 28,04% a.a.
24. a) Cr$ 2.697,35
    b) Cr$ 35.358,37
    c) Cr$ 2.030,37
    d) Cr$ 18.668,80
25. Cr$ 367,67.
26. 3%.
27. Cr$ 30.777,28.
28. Cr$ 879,96.
29. Cr$ 5.000,00.
30. Cr$ 793,30.



# Apêndice

## 1. RELAÇÃO ADICIONAL ENTRE OS FATORES $a_{\overline{n}|i}$ E $S_{\overline{n}|i}$

Além da relação já deduzida no texto, pode-se constatar que:

$$\frac{1}{S_{\overline{n}|i}} + i = \frac{1}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} + i = \frac{i}{(1+i)^n - 1} + i =$$

$$= \frac{\cancel{i} + (1+i)^n \cdot i - \cancel{i}}{(1+i)^n - 1} = \frac{1}{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

Logo:

$$\boxed{\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{S_{\overline{n}|i}} + i}$$

## 2. ANUIDADES ANTECIPADAS

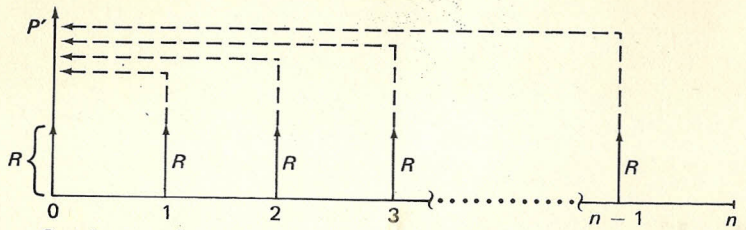
Estas anuidades são, de tipo,

- temporárias
- constantes
- imediatas e antecipadas
- periódicas

### 2.1. Valor atual

Seja $P'$ um principal que deve ser pago em $n$ prestações (ou termos) iguais a $R$, antecipadas, imediatas e periódicas, a uma taxa de juros $i$, referida ao mesmo período dos termos.

A representação gráfica é a seguinte:




O valor atual, igual ao principal ($P'$), é a soma dos valores atuais de cada uma das prestações ($R$):

$$P' = R + \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}}$$

Colocando-se $R$ em evidência:

$$P' = R\left[1 + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

Dividindo-se e multiplicando-se o segundo membro por $(1 + i)$, a igualdade não se altera:

$$P' = R\,\frac{(1+i)}{(1+i)}\left[1 + \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

$$P' = R(1+i)\left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

O valor da soma indicada entre colchetes já foi deduzido no *modelo básico* e é igual a $a_{\overline{n}|i}$.

Portanto: $\boxed{P' = R(1+i)a_{\overline{n}|i}}$

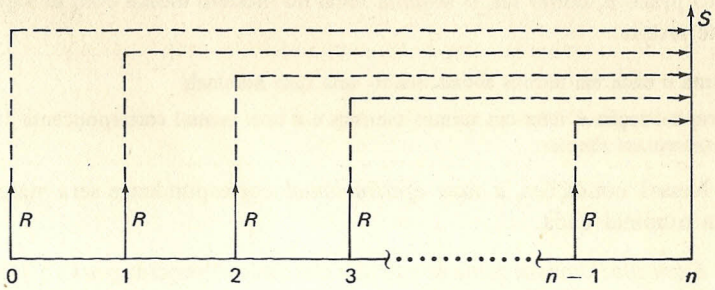
Concluímos que o *valor atual* de uma anuidade antecipada, nas condições dadas, é o *valor atual do modelo básico* multiplicado por $(1 + i)$.

### 2.2. Montante

Seja um processo de capitalização em que são depositadas $n$ parcelas (ou termos) iguais a $R$, antecipados, imediatos e periódicos, a uma taxa de juros $i$, referida ao mesmo período dos termos.



A representação gráfica é a seguinte:




O montante na data focal $n$ é dado por:

$$S' = R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^n$$

$$S' = R[(1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n]$$

Multiplicando-se e dividindo-se o segundo membro por $(1 + i)$, a igualdade não se altera:

$$S' = R\,\frac{(1+i)}{(1+i)}[(1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^n]$$

$$S' = R(1+i)[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}]$$

O valor da expressão entre colchetes já foi deduzido no *modelo básico* e é o $S_{\overline{n}|i}$.

Portanto:

$$\boxed{S' = R(1+i)S_{\overline{n}|i}}$$

Ou seja, o montante de uma anuidade antecipada, nas condições do problema, é o *montante do modelo básico* multiplicado por $(1 + i)$.

## 3. SISTEMA OU TABELA "PRICE"

O chamado sistema ou tabela "Price" (lê-se "praice") pode ser entendido como sendo um caso particular do nosso *modelo básico*. No Brasil a maior parte das aplicações deste sistema ocorre no mercado imobiliário, nas operações de médio e longo prazos. Por este motivo, este sistema é visto com maiores detalhes no Capítulo IX, que trata exclusivamente de empréstimos (ver item 2.2.3.2).

Em alguns casos, entretanto, usa-se a tabela "Price" para amortizações a curto prazo e, como tal, o sistema recai no modelo básico com as seguintes características:

a) a taxa é dada em termos anuais, sendo uma taxa nominal;

b) a capitalização é feita em termos mensais e a taxa mensal correspondente é a *taxa proporcional simples*.

Nessas condições, *a taxa efetiva anual* correspondente será maior que a taxa nominal dada.

*Exemplo:* Uma máquina de calcular eletrônica é vendida por Cr$ 4.000,00 a vista ou financiada em 5 prestações mensais iguais, sem entrada. Sabendo-se que a taxa de juros que está sendo utilizada é de 18% a.a., tabela "Price", e que a primeira prestação vence após 1 mês, pede-se: calcular o valor da prestação e a taxa de juros que está sendo efetivamente cobrada em termos anuais.

*Resolução:*

Se a taxa é de 18% a.a., então a taxa mensal é:

$$i = \frac{18\%}{12} = 1{,}5\% \text{ a.m.}$$

Logo:

$$a_{\overline{5}|1{,}5} = 4{,}782645$$

Utilizando-se o modelo básico, temos:

$$R = \frac{P}{a_{\overline{n}|i}}$$

Portanto:

$$R = \frac{4.000}{4{,}782645} = \text{Cr\$ } 836{,}36$$

A taxa de juros efetiva anual é:

$$i' = (1 + i)^{12} - 1$$

$$i' = (1{,}015)^{12} - 1 = 0{,}1956 \text{ a.a.}$$

Ou:

$$i' \cong 19{,}6\% \text{ a.a.}$$



# 8

# Modelos Genéricos de Anuidades

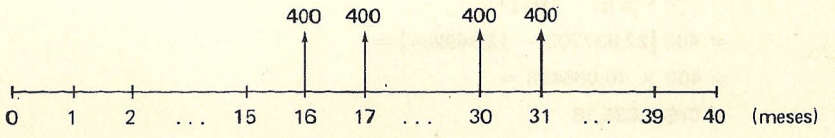
Trataremos de alguns casos genéricos de anuidades, diretamente através de exemplos. O enfoque será procurar reduzir estes exemplos, sempre que possível, ao *modelo básico* já estudado no capítulo anterior.

## 1. ANUIDADES DIFERIDAS

Como já foi visto na classificação dada, as anuidades diferidas são aquelas em que os termos são exigíveis, pelo menos, a partir do segundo período.

Em outras palavras, o primeiro termo é exigível a partir de um certo *período de carência*. Tudo se passa como se os termos fossem transladados de um intervalo de tempo igual à carência.

*Exemplo:* uma pessoa vai receber 16 prestações mensais iguais a Cr$ 400,00, com um diferimento de 15 meses:



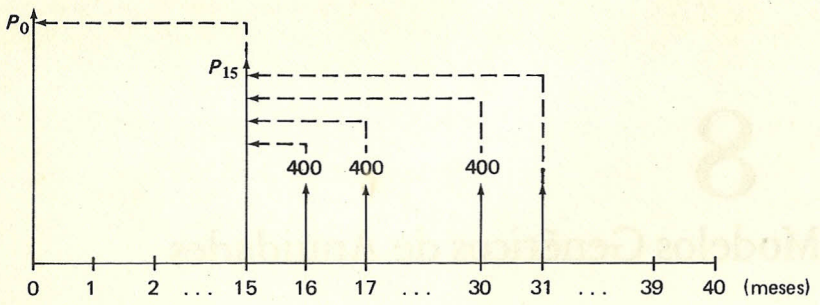
Sendo a taxa de juros igual a 2% a.m., pergunta-se:

a) Qual o valor atual das prestações na data zero?

b) Qual o montante na data focal 40?

*Resolução:*

a) *Valor do principal na data focal zero:*




Procedemos em duas etapas:

I) Calculamos o principal na data focal 15, segundo o *modelo básico*:

$$P_{15} = R \cdot a_{\overline{16}|2}$$

$$P_{15} = 400{,}00 \times 13{,}577709$$

$$P_{15} = \text{Cr\$ } 5.431{,}08$$

II) A seguir, achamos o valor atual na data focal zero e à taxa de 2% a.m.:

$$P_0 = \frac{P_{15}}{(1{,}02)^{15}}$$

$$P_0 = \frac{5.431{,}08}{1{,}345868} \cong \text{Cr\$ } 4.035{,}38$$

Pode-se chegar ao mesmo resultado calculando-se o valor atual de uma anuidade de 31 termos e subtraindo-se o valor atual de uma anuidade de 15 termos. Esta anuidade de 15 termos corresponde aos 15 primeiros termos "que não existem" no problema proposto:

$$P_0 = 400 \cdot a_{\overline{31}|2} - 400 \cdot a_{\overline{15}|2} =$$

$$= 400\,[a_{\overline{31}|2} - a_{\overline{15}|2}] =$$

$$= 400\,[22{,}937702 - 12{,}849264] =$$

$$= 400 \times 10{,}088438 =$$

$$\cong \text{Cr\$ } 4.035{,}38$$



b) *Montante na data focal 40:*

O montante na data focal 40 pode ser obtido diretamente do valor atual ($P_0$):

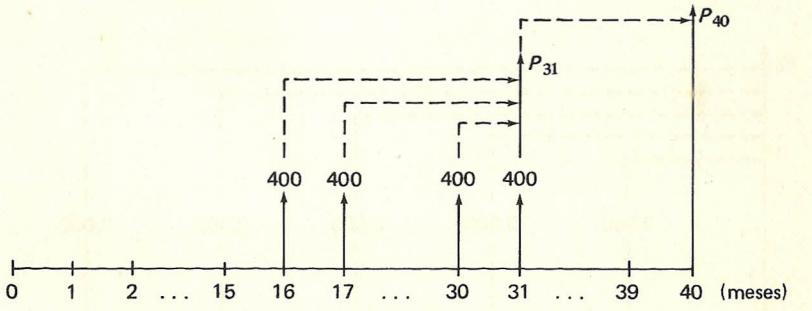
$$P_{40} = P_0(1 + i)^{40}$$

$$P_{40} = 4.035{,}38(1{,}02)^{40}$$

$$P_{40} = 4.035{,}38 \times 2{,}208040$$

$$P_{40} \cong \text{Cr\$ } 8.910{,}28$$

Alternativamente, é possível utilizar-se o *modelo básico* e calcular-se o montante na data focal 31. O valor do montante assim obtido é capitalizado até a data focal 40:




Tem-se:

$$P_{31} = 400 \cdot S_{\overline{16}|2}$$

$$P_{31} = 400 \times 18{,}639285$$

$$P_{31} = 7.455{,}71$$

Capitalizando o montante, da data focal 31 à data focal 40, resulta:

$$P_{40} = P_{31}(1{,}02)^9$$

$$P_{40} = 7.455{,}71 \times 1{,}195093$$

$$P_{40} \cong \text{Cr\$ } 8.910{,}27$$

O leitor deve constatar que é possível resolver-se o problema também do seguinte modo:

$$P_{40} = 400[S_{\overline{25}|2} - S_{\overline{9}|2}]$$

## 2. ANUIDADE EM QUE O PERÍODO DOS TERMOS NÃO COINCIDE COM AQUELE A QUE SE REFERE A TAXA

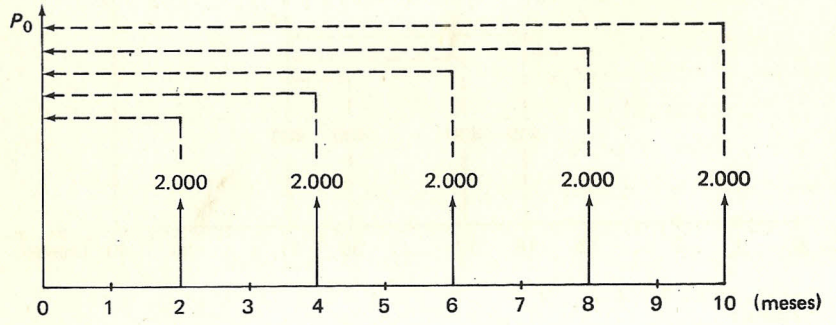
Quando o período dos termos não coincide com o período a que se refere a taxa, desde que os termos sejam constantes e periódicos,

calcula-se a taxa equivalente ao período dos termos e recai-se no *modelo básico*.

*Exemplo:* Um aparelho de som estereofônico é vendido em 5 prestações de Cr$ 2.000,00 a serem pagas a cada 2 meses. Sendo a taxa de juros cobrada de 3% a.m., qual o valor do aparelho a vista? Se o mesmo aparelho pudesse ser pago em uma única vez após 10 meses, qual a quantia que a loja cobraria, admitida a mesma taxa de juros?

*Resolução:*

Graficamente, a situação é a seguinte:




Como a taxa de juros está referida em termos mensais e as prestações estão referidas a bimestres, calculamos a taxa bimestral equivalente:

$$1 + i' = (1 + 0{,}03)^2$$

$$i' = 1{,}0609 - 1$$

$$i' = 0{,}0609 \text{ a.b.} \quad \text{ou} \quad i' = 6{,}09\% \text{ a.b.}$$

Agora temos uma anuidade nas mesmas condições do *modelo básico*, pois a taxa se refere ao mesmo intervalo de tempo dos termos e podemos calcular:

a) *Preço a vista:*

$$P_0 = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

onde:

$R$ = 2.000,00 por bimestre

$i = i'$ = 6,09% a.b.

$n$ = 5 bimestres



Portanto:

$$a_{\overline{5}|6{,}09} = \frac{(1{,}0609)^5 - 1}{(1{,}0609)^5 \cdot 0{,}0609}$$

$$a_{\overline{5}|6{,}09} = 4{,}202070$$

E o valor atual:

$$P_0 = 2.000{,}00 \times 4{,}202070$$

$$P_0 = \text{Cr\$ } 8.404{,}14$$

Concluímos que o preço do aparelho a vista é Cr$ 8.404,14.

b) *Preço após 10 meses:*

O montante na data focal 10 pode ser obtido por capitalização direta:

$$P_{10} = P_0(1 + i')^5$$

$$P_{10} = 8.404{,}14\,(1{,}0609)^5$$

$$P_{10} = 8.404{,}14 \times 1{,}343916$$

$$P_{10} = \text{Cr\$ } 11.294{,}46$$

Nota: O leitor deve verificar que: $P_{10} = P_0(1{,}03)^{10}$.

Outro modo para se obter este resultado é utilizar o conceito de montante do *modelo básico*:

$$P_{10} = 2.000 \cdot s_{\overline{5}|6{,}09}$$

$$P_{10} = 2.000 \times 5{,}647231$$

$$P_{10} = \text{Cr\$ } 11.294{,}46$$

## 3. ANUIDADE COM TERMOS CONSTANTES, SEGUNDO O MODELO BÁSICO, MAIS PARCELAS INTERMEDIÁRIAS IGUAIS

Quando a anuidade se apresenta com termos iguais e, além disso, tem parcelas intermediárias eqüidistantes e de mesmo valor, a resolução é feita em duas etapas:

a) Uniformização da anuidade, de modo que todos os termos sejam iguais entre si, com a taxa de juros $i$ referida ao período dos termos. Nessas condições, esta anuidade se conforma ao modelo básico e pode ter seu valor atual e montante calculados.

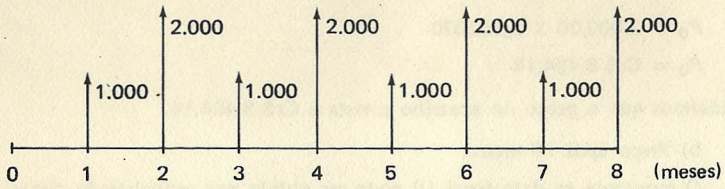
b) Por diferença, determina-se o valor das parcelas intermediárias, que são iguais entre si. A seguir, calcula-se a taxa de juros equivalente ($i'$), referida ao período dos termos intermediários. Essa anuidade agora está conforme à anuidade apresentada no item anterior e pode ser resolvida.

*Exemplo:* Um carro é vendido em oito prestações mensais. As prestações de ordem ímpar são iguais a Cr$ 1.000,00, enquanto que as de

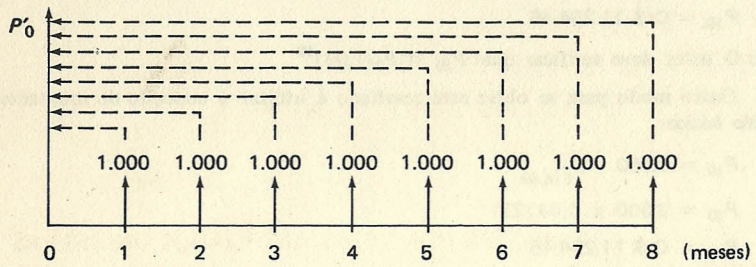
ordem par são iguais a Cr$ 2.000,00. Considerando-se a taxa de juros de 2% a.m., qual é o preço a vista?

*Resolução:*

Graficamente, tem-se:




a) Uniformizando a anuidade de modo a se ter 8 termos iguais a Cr$ 1.000,00:



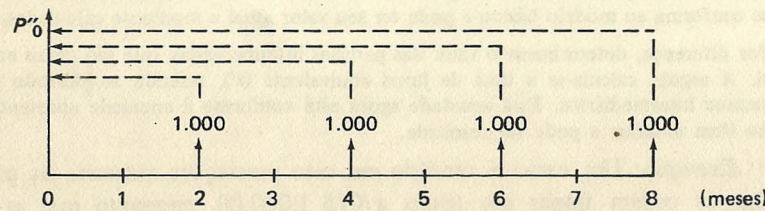

O valor atual ($P'_0$) dessa anuidade na data focal zero, é:

$P'_0 = R \cdot a_{\overline{8}|2}$

$P'_0 = 1.000 \times 7{,}325481$

$P'_0 = \text{Cr\$ } 7.325{,}48$

b) Considerando apenas a diferença entre a anuidade original e a anuidade uniformizada (item *a*), obtemos a anuidade constituída pelas parcelas intermediárias:






Calculando-se a taxa equivalente bimestral, tem-se:

$1 + i' = (1{,}02)^2$

$i' = 1{,}0404 - 1$

$i' = 0{,}0404$ a.b. ou $i' = 4{,}04\%$ a.b.

Podemos calcular agora:

$$a_{\overline{4}|4{,}04} = \frac{(1{,}0404)^4 - 1}{(1{,}0404)^4 \cdot 0{,}0404} \cong 3{,}626476$$

E, portanto:

$P''_0 = 1.000 \cdot a_{\overline{4}|4{,}04}$

$P''_0 = 1.000 \times 3{,}626476$

$P''_0 \cong \text{Cr\$ } 3.626{,}48$

Agora podemos determinar o preço do carro a vista:

$P_0 = P'_0 + P''_0$

$P_0 = 7.325{,}48 + 3.626{,}48$

$P_0 = \text{Cr\$ } 10.951{,}96$

Logo, o preço do carro a vista é Cr$ 10.951,96.

Obs.: O montante é: $P_8 = P_0(1 + i)^8$.

## 4. ANUIDADE COMPOSTA POR DUAS ANUIDADES DIFERIDAS EM SEQÜÊNCIA

Para resolver este problema, procedemos do modo já visto em anuidades diferidas (ver item 1):

a) Calculam-se os *valores atuais* de cada uma das anuidades, fazendo-se a subtração dos termos "não-existentes", que correspondem ao diferimento, para cada uma das anuidades. Alternativamente, é possível calcular o valor atual em uma data focal intermediária e, em seguida, calcular o valor atual na data focal zero.

b) O *montante* pode ser obtido a partir do *valor atual*, obtido no item anterior, fazendo-se a capitalização até a data focal requerida, ou, capitalizando os termos pela diferença dos $S_{\overline{n}|i}$ (ver item 1).

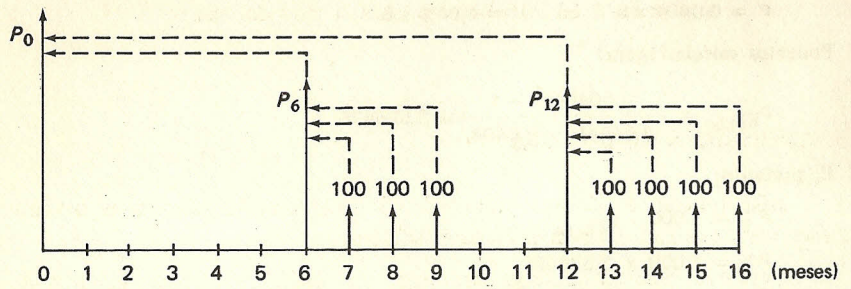
*Exemplo:* uma pessoa comprou um gravador, para pagar em 7 prestações, do seguinte modo:

- 3 prestações de Cr$ 100,00 no 7º, 8º e 9º mês;
- 4 prestações de Cr$ 100,00 no 13º, 14º, 15º e 16º mês.

A taxa de juros cobrada foi de 2% a.m. Pergunta-se o valor do gravador a vista.

*Resolução:*

Tem-se a seguinte representação gráfica:




O cálculo é o seguinte:

$$P_6 = 100 \cdot a_{\overline{3}|2}$$

$$P_6 = 100 \times 2{,}883883$$

$$\therefore P_6 = \text{Cr\$ } 288{,}39$$

E, para a segunda anuidade:

$$P_{12} = 100 \cdot a_{\overline{4}|2}$$

$$P_{12} = 100 \times 3{,}807729$$

$$\therefore P_{12} = \text{Cr\$ } 380{,}77$$

Portanto:

$$P_0 = \frac{P_6}{(1+i)^6} + \frac{P_{12}}{(1+i)^{12}}$$

$$P_0 = \frac{288{,}39}{(1{,}02)^6} + \frac{380{,}77}{(1{,}02)^{12}}$$

$$P_0 = 256{,}08 + 300{,}23$$

$$\therefore P_0 = \text{Cr\$ } 556{,}31$$

Portanto, o preço do gravador a vista é Cr$ 556,31.

**Notas:**

a) O cálculo direto também é possível, por subtração das parcelas "não-existentes" (ou seja, as parcelas correspondentes ao diferimento):

$$P_0 = 100[(a_{\overline{5}|2}) - (a_{\overline{6}|2}) + (a_{\overline{16}|2} - a_{\overline{12}|2})]$$

$$P_0 = 100[(8{,}162237 - 5{,}601431) + (13{,}577709 - 10{,}575341)]$$



$$P_0 = 100[2{,}560806 + 3{,}002368]$$

$$P_0 = 100 \times 5{,}563174$$

$$P_0 \cong \text{Cr\$ } 556{,}32$$

b) O montante é possível de obter por capitalização do valor atual:

$$P_{16} = P_0 \cdot (1+i)^{16}$$

## 5. ANUIDADES PERPÉTUAS

São aquelas de duração ilimitada. Só tem sentido calcular-se o *valor atual*, uma vez que o montante será infinito.

Sendo $P$ um principal a ser pago em *infinitos* termos iguais a $R$, postecipados, imediatos e periódicos, a uma taxa de juros $i$, referida ao mesmo período dos termos, tem-se (ver Apêndice):

$$\boxed{P = \frac{R}{i}}$$

Ou seja, o principal é obtido dividindo-se o valor do termo pela taxa de juros.

Essa fórmula pode ser utilizada para se fazer uma avaliação rápida de imóveis. Para tanto é necessária a hipótese seguinte: que o imóvel tenha um horizonte de aproveitamento infinito e que renda um aluguel constante.

Nestas condições, o *valor do imóvel* pode ser entendido como sendo o valor atual da soma dos aluguéis descontados, desconto esse à taxa de juros ($i$) que representa o ganho que o possuidor do imóvel teria se aplicasse seu dinheiro a juros compostos no mercado financeiro. Em outras palavras, a taxa de juros ($i$) representa o *custo de oportunidade* do investidor, que é a taxa de juros que ele receberia na melhor aplicação alternativa.

O aluguel, portanto, seria o pagamento pela utilização de um capital (igual ao valor do imóvel), pagando-se os juros, mas sem devolver o principal, pois o imóvel nunca pertencerá ao locatário.

*Exemplo:* Se um apartamento está rendendo um aluguel de Cr$ 500,00 por mês e se a taxa da melhor aplicação no mercado financeiro é de 1% a.m., qual seria uma primeira estimativa do valor do imóvel?

*Resolução:*

Admitindo-se as hipóteses de duração ilimitada do apartamento e de ser o aluguel constante, tem-se:

$$P = \frac{R}{i}$$

$$P = \frac{500,00}{0,01}$$

$$P = \text{Cr\$ } 50.000,00$$

Ou seja, numa primeira aproximação, o imóvel seria avaliado em Cr$ 50.000,00.

## 6. ANUIDADES VARIÁVEIS

São as anuidades cujos termos não são iguais entre si.

Se tivermos uma anuidade variável que seja:

- temporária
- imediata e postecipada
- periódica

sua resolução é feita calculando-se o *valor atual* como sendo a soma dos valores atuais de cada um de seus termos. É possível obter o *montante* pela capitalização do valor atual ou pela soma dos montantes de cada termo.

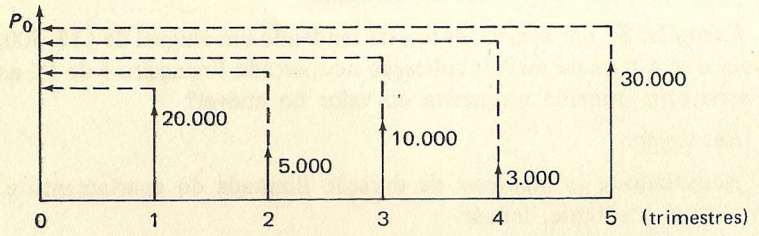
*Exemplo:* um terreno foi comprado para ser pago em 5 prestações trimestrais, com os seguintes valores:

*1º trimestre:* 20.000,00
*2º trimestre:* 5.000,00
*3º trimestre:* 10.000,00
*4º trimestre:* 3.000,00
*5º trimestre:* 30.000,00

Sendo a taxa de juros para aplicações financeiras vigente no mercado de 2,5% a.m., pergunta-se o valor do terreno a vista.

*Resolução:*

Graficamente, a situação é a seguinte:






Como a taxa de juros está referida ao mês e as prestações são trimestrais, calculamos a taxa trimestral equivalente:

$$1 + i' = (1 + i)^3$$

$$1 + i' = (1,025)^3$$

$$i' = 1,07689 - 1$$

$$i' = 0,07689 \text{ a.t.} \quad \text{ou} \quad i' = 7,689\% \text{ a.t.}$$

Calculando-se o valor atual de cada prestação à taxa de juros $i'$, tem-se:

$$P_0 = \frac{20.000}{(1,07689)^1} + \frac{5.000}{(1,07689)^2} + \frac{10.000}{(1,07689)^3} + \frac{3.000}{(1,07689)^4} + \frac{30.000}{(1,07689)^5}$$

$$P_0 = 18.572,00 + 4.311,49 + 8.007,30 + 2.230,67 + 20.714,03$$

$$P_0 = \text{Cr\$ } 53.835,49$$

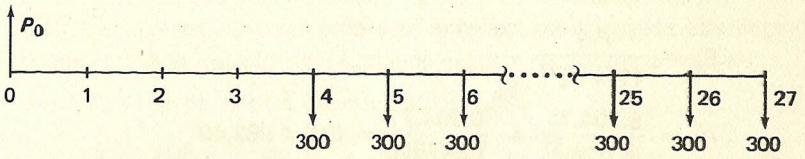
Portanto, o preço do terreno a vista é de, aproximadamente, 54 mil cruzeiros.

## 7. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Um magazine oferece, em sua promoção, um televisor por 24 prestações de Cr$ 300,00, ocorrendo o primeiro pagamento apenas após 4 meses da compra. Qual seria o preço a vista deste televisor, uma vez que a taxa de mercado é de 2,5% a.m.?

*Resolução:*

Construindo-se o diagrama dos valores no tempo, tem-se:




$R = 300$

$i = 2,5\%$ a.m.

$n = 24$ meses

Como existe diferimento de 3 meses, se aplicarmos diretamente o fator de valor atual, vem:

$$P_3 = 300 \cdot a_{\overline{24}|2,5}$$

$$P_3 = 300(17,884986)$$

$$P_3 = \text{Cr\$ } 5.365,50$$

O preço a vista é o valor atual na data zero, ou seja, por ocasião da compra, portanto:

$$P_0 = \frac{P_3}{(1+i)^3}$$

$$P_0 = \frac{5.365,50}{(1,025)^3}$$

$$P_0 = \frac{5.365,50}{1,076891} = \text{Cr\$ } 4.982,40$$

Outro método de solução é obtido pela diferença dos fatores de valor atual, ou seja, considera-se o fator para 27 prestações e deduzindo-se o fator para 3 prestações (que inexistem).

$$P_0 = 300\,(a_{\overline{27}|2,5} - a_{\overline{3}|2,5})$$

$$P_0 = 300(19,464011 - 2,856024)$$

$$P_0 = 300(16,607987)$$

$$P_0 = \text{Cr\$ } 4.982,40$$

Como terceira opção, poder-se-ia calcular o montante ($S$) na data 27 e, em seguida, calcular seu valor na data 0:

$$P_{27} = 300 \cdot S_{\overline{24}|2,5}$$

$$P_{27} = 300(32,349038)$$

$$P_{27} = 9.704,71$$

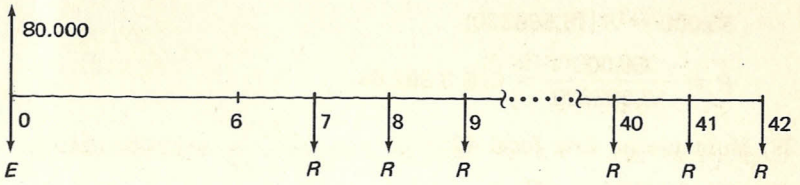
$$P_0 = \frac{P_{27}}{(1+i)^{27}}$$

$$P_0 = \frac{9.704,71}{(1,025)^{27}} = \frac{9.704,71}{1,947800} = \text{Cr\$ } 4.982,40$$

2. O preço a vista de um carro é de Cr$ 80.000,00. A revendedora exige 30% como entrada, financiando o saldo em 36 prestações, com 6 meses de carência. Sabendo-se que a taxa de juros da agência é de 3,5% a.m., qual é o valor das prestações?



*Resolução:*




$$E = 0,30(80.000)$$

$$E = 24.000$$

$$P_0 = 80.000 - 24.000 = 56.000$$

$$P_0 = 56.000$$

$$i = 3,5\% \text{ a.m.}$$

$$n = 36 \text{ meses}$$

$$P_6 = P_0\,(1,035)^6$$

e

$$P_6 = R \cdot a_{\overline{36}|3,5}$$

então:

$$56.000(1,035)^6 = R \cdot a_{\overline{36}|3,5}$$

$$56.000(1,229255) = R(20,290494)$$

$$68.838,28 = R(20,290494)$$

$$R = \frac{68.838,28}{20,290494} = \text{Cr\$ } 3.392,64$$

A solução do problema também poderia ser obtida pelos dois outros métodos apresentados no problema anterior, ou seja, pela diferença de fatores ou pelo cálculo do montante na data da última prestação:

1º) Diferença de fatores de valor atual:

$$P_0 = R\,(a_{\overline{n}|i} - a_{\overline{k}|i})$$

onde:

$k$ = período de carência

$n$ = período da última prestação

$$56.000 = R(a_{\overline{42}|3,5} - a_{\overline{6}|3,5})$$

$$56.000 = R(21,834883 - 5,328553)$$

$$56.000 = R(16,506330)$$

$$R = \frac{56.000}{16,506330} = \text{Cr\$ } 3.392,64$$

2º) Montante na data focal 42:

$$P_{42} = P_0(1 + i)^{42}$$

$$P_{42} = R \cdot S_{\overline{36}|3,5}$$

$$56.000(1,035)^{42} = R(70,007603)$$

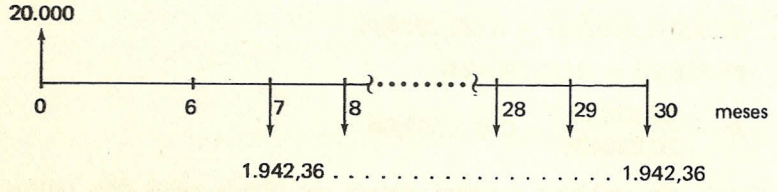
$$56.000(4,241258) = R(70,007603)$$

$$R = \frac{237.510,45}{70,007603} = \text{Cr\$ } 3.392,64$$

Portanto, podemos utilizar qualquer dos métodos.

3. Um noivo, precisando comprar seus móveis e não dispondo de dinheiro de imediato, abriu um crediário em uma loja, no valor de Cr$ 20.000,00. Por esta compra irá pagar 24 prestações de Cr$ 1.942,36, mensalmente, com 6 meses de carência. Qual é a taxa de juros mensal desta loja "camarada"?

*Resolução:*




$P_0 = 20.000$

$R = 1.942,36$

$n = 24$ meses

$i = ?$

Como temos carência de 6 meses, então:

$$P_6 = R \cdot a_{\overline{n}|i} \Longrightarrow P_6 = P_0(1 + i)^6$$



portanto:

$$20.000(1 + i)^6 = 1.942,36 \cdot a_{\overline{24}|i}$$

$$\frac{20.000}{1.942,36} = \frac{a_{\overline{24}|i}}{(1 + i)^6}$$

$$10,296752 = \frac{a_{\overline{24}|i}}{(1 + i)^6}$$

A solução pode ser encontrada por tentativa e erro. Testando-se 2% a.m., tem-se:

$$a_{\overline{24}|2} = 18,913926$$

$$(1,02)^6 = 1,126162$$

Então

$$\frac{a_{\overline{24}|i}}{(1 + i)^6} = \frac{18,913926}{1,126162} = 16,795031$$

Como $16,795031 > 10,296752 \Longrightarrow 2\% < i$.

Portanto, a taxa verdadeira $i$ é superior a 2% a.m. e deve ser bem mais alta visto que a diferença entre os fatores é relativamente ampla.

Examinemos a taxa de 7% a.m.:

$$a_{\overline{24}|7} = 11,469334$$

$$(1,07)^6 = 1,500730$$

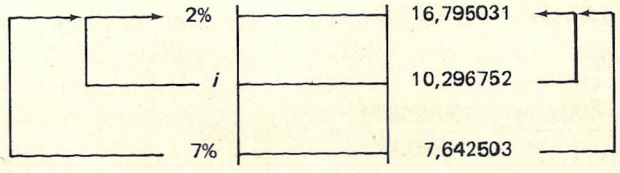
Então

$$\frac{a_{\overline{24}|i}}{(1 + i)^6} = \frac{11,469334}{1,500730} = 7,642503$$

Comparando: $7,642503 < 10,296752 \Longrightarrow 7\% > i$

Portanto, a taxa $i$ deve estar no intervalo de 2% a 7%.

Interpolando linearmente, temos:



$$\frac{i-2}{7-2} = \frac{10{,}296752 - 16{,}795031}{7{,}642503 - 16{,}795031}$$

$$\frac{i-2}{5} = \frac{-6{,}498279}{-9{,}152528}$$

$$i = 2 + 5(0{,}709998)$$

$$\therefore\ i \cong 5{,}55\%\ \text{a.m.}$$

Testando:

$$a_{\overline{24}|5{,}5} = \frac{1 - (1{,}055)^{-24}}{0{,}055} = 13{,}151699$$

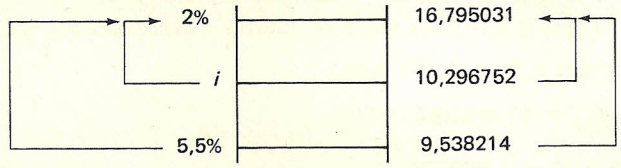
$$(1{,}055)^6 = 1{,}378843$$

Portanto:

$$\frac{a_{\overline{24}|i}}{(1+i)^6} = \frac{13{,}151699}{1{,}378843} = 9{,}538214$$

Comparando: $9{,}538214 < 10{,}296752 \Longrightarrow 5{,}5\% > i$

Processando-se a segunda interpolação, vem:




$$\frac{i-2}{5{,}5-2} = \frac{10{,}296752 - 16{,}795031}{9{,}538214 - 16{,}795031}$$

$$i = 2 + 3{,}5(0{,}895472)$$

$$\therefore\ i \cong 5{,}13\%\ \text{a.m.}$$

Testando:

$$a_{\overline{24}|5{,}13} = \frac{1 - (1{,}0513)^{-24}}{0{,}0513} = 13{,}625818$$

$$(1{,}0513)^6 = 1{,}350082$$

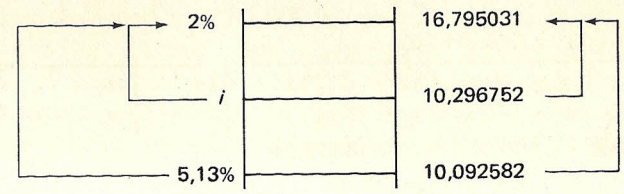
Portanto:

$$\frac{a_{\overline{24}|i}}{(1+i)^6} = \frac{13{,}625818}{1{,}350082} = 10{,}092582$$



Comparando: $10{,}092582 < 10{,}296752 \Longrightarrow 5{,}13\% > i$

Na terceira interpolação, teremos:




$$\frac{i-2}{5{,}13-2} = \frac{10{,}296752 - 16{,}795031}{10{,}092582 - 16{,}795031}$$

$$i = 2 + 3{,}13(0{,}969538)$$

$$\therefore\ i = 5{,}03\%\ \text{a.m.}$$

Testando:

$$a_{\overline{24}|5{,}03} = \frac{1 - (1{,}0503)^{-24}}{0{,}0503} = 13{,}758463$$

$$(1{,}0503)^6 = 1{,}342395$$

Então:

$$\frac{a_{\overline{24}|i}}{(1+i)^6} = \frac{13{,}758463}{1{,}342395} = 10{,}249191$$

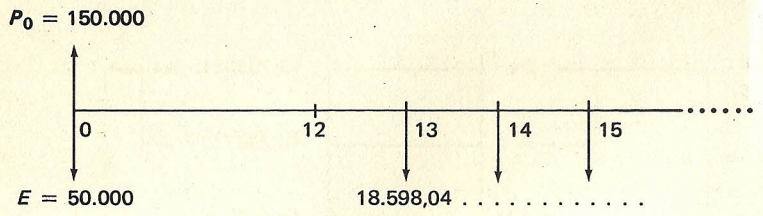
Comparando: $10{,}249191 < 10{,}296752 \Longrightarrow 5{,}03\% > i$

Processando-se a quarta interpolação, chegaremos à taxa de 5% a.m., que é a taxa exata.

O elevado número de interpolações deve-se ao fato de que foi tomado um intervalo amplo. O mais correto seria tentar descobrir primeiro, com auxílio das tabelas, o menor dos intervalos que contivesse a taxa a ser calculada.

4. Antônio compra de um amigo um apartamento, cujo valor a vista é de Cr$ 150.000,00, nas seguintes condições: entrada de Cr$ 50.000,00 mais prestações mensais de Cr$ 18.598,04, com 1 ano de carência. Sabendo-se que a taxa de juros contratada fora de 4,5% a.m., qual é o número de prestações?

*Resolução:*




$P'_0 = 150.000 - 50.000 = 100.000$ (valor financiado)

$P'_0 = 100.000$

$R = 18.598,04$

$i = 4,5\%$ a.m.

$n = ?$

$$P_{12} = P'_0(1 + i)^{12}$$

$$P_{12} = 100.000(1,045)^{12} = 169.588,14$$

$$P_{12} = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$169.588,14 = 18.598,04 \cdot a_{\overline{n}|4,5}$$

$$a_{\overline{n}|4,5} = \frac{169.588,14}{18.598,04} = 9,118603$$

Procurando na tabela para $i = 4,5\%$, encontramos que

$$a_{\overline{12}|4,5} = 9,118581$$

ou seja, $n$ é aproximadamente igual a 12 meses.

Por logaritmos, teríamos:

$$a_{\overline{n}|4,5} = \frac{1 - (1,045)^{-n}}{0,045}$$

então

$$9,118603 = \frac{1 - (1,045)^{-n}}{0,045}$$

$$n = -\frac{\log[1 - 0,045(9,118603)]}{\log(1,045)}$$



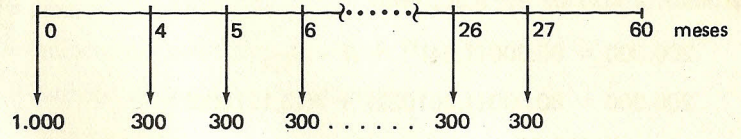
$$n = -\frac{-0,229396}{0,019116}$$

$\therefore n = 12$ meses.

5. Uma pessoa depositou Cr$ 1.000,00, abrindo uma conta em uma instituição que paga 2% a.m. sobre o saldo credor. Em seguida efetuou uma série de 24 depósitos mensais de Cr$ 300,00, sendo que o primeiro foi feito 4 meses após a abertura da conta. Supondo-se que não seja efetuada nenhuma retirada, quanto terá 5 anos após a abertura da conta?

*Resolução:*

Graficamente temos:




Calculando-se o montante das anuidades na data 27, vem:

$R = 300$

$i = 2\%$ a.m.

$n = 24$ meses

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

$$P_{27} = 300 \cdot S_{\overline{24}|2}$$

$$P_{27} = 300(30,421862) = \text{Cr\$ } 9.126,56$$

O montante total na data 60 será de:

$$P_{60} = P_0(1 + i)^{60} + P_{27}(1 + i)^{33}$$

$$P_{60} = 1.000(1,02)^{60} + 9.126,56(1,02)^{33}$$

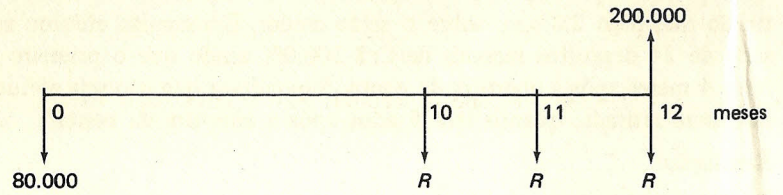
$$P_{60} = 1.000(3,281031) + 9.126,56(1,922231)$$

$$P_{60} = \text{Cr\$ } 20.824,39$$

6. Quanto deve ser depositado mensalmente em 30 de outubro, de novembro e de dezembro para que, após o último depósito, se tenha Cr$ 200.000,00? Sabe-se que a taxa de remuneração é de 4% a.m. e que foi efetuado um depósito de Cr$ 80.000,00, doze meses antes do depósito de dezembro.

*Resolução:*

Considerando o mês de dezembro como sendo mês 12, teremos no gráfico:




Portanto, à taxa de 4% a.m., vem:

$$200.000 = 80.000(1{,}04)^{12} + R \cdot s_{\overline{3}|4}$$

$$200.000 = 80.000(1{,}601032) + R(3{,}121600)$$

$$R = \frac{71.917{,}44}{3{,}121600} = \text{Cr\$ } 23.038{,}65$$

7. Para dinamizar o setor de vendas, o gerente deseja publicar tabelas dos coeficientes de financiamento por unidade de capital. Deste modo, seus vendedores poderão apresentar os múltiplos planos de financiamento, informando ao cliente qual é a prestação em cada um, bastando, para isso, multiplicar o valor a ser financiado pelo coeficiente. Qual é o coeficiente em cada uma das hipóteses abaixo, se a taxa de juros for de 3,5% a.m.?

| Carência | Número de prestações |
|---|---|
| a) 3 meses | 12 |
| b) 4 meses | 12 |
| c) 6 meses | 24 |
| d) 6 meses | 36 |

*Resolução:*

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$R = P \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

O coeficiente é, portanto, igual a $\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$.



Considere-se também que:

$$P_k = P_0(1 + i)^k$$

Portanto, com carência de $k$ períodos, teremos:

$$R = P_0 \frac{(1 + i)^k}{a_{\overline{n}|i}}$$

Para $P_0$ = Cr$ 1,00 (unidade de capital) vem o coeficiente ($\alpha$):

$$\alpha = \frac{(1 + i)^k}{a_{\overline{n}|i}}$$

onde:

$i$ = taxa de juros

$n$ = número de prestações

$k$ = número de períodos da carência

a) $i$ = 3,5% a.m.

$n$ = 12 prestações

$k$ = 3 meses (carência)

$$\alpha = \frac{(1 + i)^k}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{(1{,}035)^3}{a_{\overline{12}|3{,}5}}$$

$$\alpha = \frac{1{,}108718}{9{,}663334}$$

$$\therefore \alpha = 0{,}114735$$

b) $i$ = 3,5% a.m.

$n$ = 12 prestações

$k$ = 4 meses (carência)

$$\alpha = \frac{(1 + i)^k}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{(1{,}035)^4}{a_{\overline{12}|3{,}5}}$$

$$\alpha = \frac{1{,}147523}{9{,}663334}$$

$$\therefore \alpha = 0{,}118750$$

c) $i$ = 3,5% a.m.

$n$ = 24 prestações

$k$ = 6 meses (carência)

$$\alpha = \frac{(1+i)^k}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{(1{,}035)^6}{a_{\overline{24}|3{,}5}}$$

$$\alpha = \frac{1{,}229255}{16{,}058368}$$

$$\therefore \alpha = 0{,}076549$$

d) $i = 3{,}5\%$ a.m.

$n = 36$ prestações

$k = 6$ meses (carência)

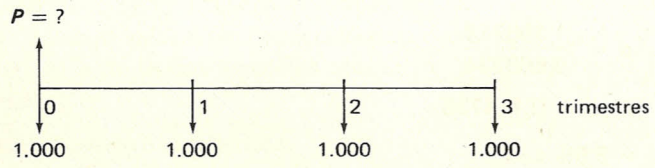
$$\alpha = \frac{(1+i)^k}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{(1{,}035)^6}{a_{\overline{36}|3{,}5}}$$

$$\alpha = \frac{1{,}229255}{20{,}290494}$$

$$\therefore \alpha = 0{,}060583$$

8. Uma bicicleta foi vendida em 4 prestações trimestrais de Cr$ 1.000,00, sendo a primeira na compra. Se a taxa de mercado é de 3% a.m., qual é o preço a vista?

*Resolução:*




Como as prestações são trimestrais, o primeiro passo é encontrar a taxa trimestral equivalente ($i_t$):

$$1 + i_t = (1+i)^3$$

$$1 + i_t = (1{,}03)^3$$

$$1 + i_t = 1{,}092727$$

$$\therefore i_t = 0{,}092727 \quad \text{ou} \quad i_t = 9{,}2727\% \text{ a.t.}$$

Portanto, temos:

$E = 1.000$

$R = 1.000$



$i = 9{,}2727\%$ a.t.

$n = 3$ trimestres

$$P = E + R \cdot a_{\overline{3}|i}$$

$$P = 1.000 + 1.000 \cdot a_{\overline{3}|i}$$

$$P = 1.000[1 + a_{\overline{3}|i}]$$

$$a_{\overline{3}|9{,}2727} = \frac{1 - (1{,}092727)^{-3}}{0{,}092727} = \frac{1 - (0{,}766417)}{0{,}092727}$$

$$a_{\overline{3}|9{,}2727} = 2{,}519040$$

então:

$$P = 1.000[1 + 2{,}519040]$$

$$P = \text{Cr\$ } 3.519{,}04.$$

9. Uma loja anuncia a venda de um televisor por Cr$ 6.000,00 a vista. Um cliente está disposto a comprá-lo por Cr$ 2.000,00 de entrada, mais 36 prestações mensais. De quanto serão as prestações, se a taxa de juros cobrada pela loja for de 50% a.a.?

*Resolução:*

Calculando a taxa equivalente mensal, tem-se:

$$1 + i_m = \sqrt[12]{1{,}50}$$

$$1 + i_m = 1{,}034368$$

$$i_m = 0{,}034368 \quad \text{ou} \quad i_m = 3{,}4368\% \text{ a.m.}$$

$$P'_0 = P_0 - E$$

$$P'_0 = 6.000 - 2.000 = 4.000$$

Portanto:

$P'_0 = 4.000$

$i_m = 3{,}4368\%$ a.m.

$n = 36$ meses

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$4.000 = R \cdot a_{\overline{36}|3{,}4368}$$

$$a_{\overline{36}|3{,}4368} = \frac{1 - (1{,}034368)^{-36}}{0{,}034368} = 20{,}476125$$

$$4.000 = R(20,476125)$$

$$R = \frac{4.000}{20,476125} = \text{Cr\$ } 195,35$$

10. Um terreno é vendido por Cr$ 300.000,00 a vista ou por Cr$ 100.000,00 de entrada, sendo o saldo financiado. Sabendo-se que a taxa de juros da imobiliária é de 45% a.a., de quanto serão as prestações, caso o cliente opte por algum dos planos abaixo:

a) 24 prestações mensais

b) 8 prestações trimestrais

c) 4 prestações semestrais

*Resolução:*

$$P'_0 = P_0 - E$$

$$P'_0 = 300.000 - 100.000 = 200.000 \quad \text{(saldo financiado)}$$

Em cada um dos planos temos de calcular a taxa de juros equivalente ao período a que se refere a prestação.

a) Prestação mensal:

$$1 + i_m = \sqrt[12]{1,45}$$

$$1 + i_m = 1,031448$$

$$\therefore i_m = 0,031448 \quad \text{ou} \quad i_m = 3,1448\% \text{ a.m.}$$

Então:

$$P'_0 = 200.000$$

$$i_m = 3,1448\% \text{ a.m.}$$

$$n = 24 \text{ meses}$$

$$R = ?$$

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$200.000 = R \cdot a_{\overline{24}|3,1448}$$

$$a_{\overline{24}|3,1448} = \frac{1 - (1,031448)^{-24}}{0,031448} = 16,674379$$

$$200.000 = R(16,674379)$$

$$R = \frac{200.000}{16,674379} = \text{Cr\$ } 11.994,45$$



b) Prestação trimestral:

$$1 + i_t = \sqrt[4]{1,45}$$

$$1 + i_t = 1,097342$$

$$\therefore i_t = 0,097342 \quad \text{ou} \quad i_t = 9,7342\% \text{ a.t.}$$

Portanto:

$$P'_0 = 200.000$$

$$i_t = 9,7342\% \text{ a.t.}$$

$$n = 8 \text{ trimestres}$$

$$R = ?$$

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$200.000 = R \cdot a_{\overline{8}|9,7342}$$

$$a_{\overline{8}|9,7342} = \frac{1 - (1,097342)^{-8}}{0,097342} = 5,386942$$

$$200.000 = R(5,386942)$$

$$R = \frac{200.000}{5,386942} = \text{Cr\$ } 37.126,82$$

c) Prestação semestral:

$$1 + i_s = \sqrt[2]{1,45}$$

$$1 + i_s = 1,204159$$

$$\therefore i_s = 0,204159 \quad \text{ou} \quad i_s = 20,4159\% \text{ a.s.}$$

Portanto:

$$P'_0 = 200.000$$

$$i_s = 20,4159\% \text{ a.s.}$$

$$n = 4 \text{ semestres}$$

$$R = ?$$

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$200.000 = R \cdot a_{\overline{4}|20,4159}$$

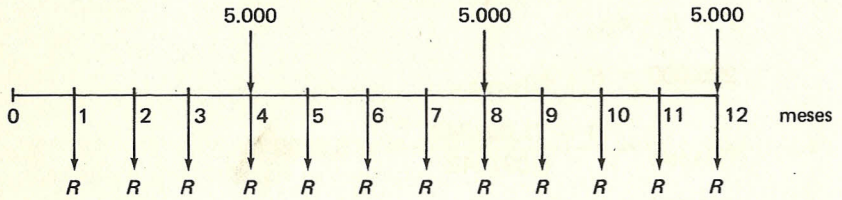
$$a_{\overline{4}|20,4159} = \frac{1 - (1,204159)^{-4}}{0,204159} = 2,568464$$

$$200.000 = R(2,568464)$$

$$R = \frac{200.000}{2,568464} = \text{Cr\$ } 77.867,55$$

11. Numa compra efetuada, o cliente teve o saldo devedor financiado em 3 prestações quadrimestrais de Cr$ 5.000,00. Contudo, para evitar esta concentração nos desembolsos, o cliente solicitou a transformação do financiamento em 12 prestações mensais. Se a taxa de juros da loja for de 2% a.m., qual deverá ser o valor das prestações mensais?

*Resolução:*




Este problema pode ser resolvido, no mínimo, por dois modos:

1º) Calcular o valor atual na data 0 (preço a vista) das prestações trimestrais e em seguida calcular as prestações mensais, considerando-se a taxa de 2% a.m.

2º) Considerar que Cr$ 5.000,00 (prestação quadrimestral) é o montante de quatro prestações mensais, à taxa de 2% a.m.

1º) *Calculando o valor atual na data 0:*

$i_q$ = taxa equivalente quadrimestral

$1 + i_q = (1,02)^4$

$1 + i_q = 1,082432$

$\therefore\ i_q = 0,082432$ ou $i_q = 8,2432\%$ a.q.

Então:

$R = 5.000$

$i_q = 8,2432\%$ a.q.

$n = 3$ quadrimestres

$P_0 = ?$



$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$P_0 = 5.000 \cdot a_{\overline{3}|8,2432}$$

$$P_0 = 5.000(2,565830)$$

$$P_0 = \text{Cr\$ } 12.829,15$$

A prestação mensal será de:

$$12.829,15 = R \cdot a_{\overline{12}|2}$$

$$12.829,15 = R(10,575341)$$

$$R = \frac{12.829,15}{10,575341} = \text{Cr\$ } 1.213,12$$

2º) *Calculando o montante na data 4:*

$S = 5.000$

$i = 2\%$ a.m.

$n = 4$ prestações

$R = ?$

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

$$5.000 = R \cdot S_{\overline{4}|2}$$

$$5.000 = R(4,121608)$$

$$R = \frac{5.000}{4,121608} = \text{Cr\$ } 1.213,12$$

A idéia subjacente ao cálculo ora efetuado é que a prestação quadrimestral deve equivaler ao montante de 4 prestações mensais, considerando-se a mesma taxa de juros.

12. Que porcentagem do valor a vista deve ser dada como entrada para que 4 prestações trimestrais tenham o mesmo valor unitário que 12 prestações mensais? Considerar a taxa de juros de 50% a.a.

*Resolução:*

Inicialmente vamos calcular as taxas $i_m$ = taxa mensal e $i_t$ = taxa trimestral, equivalentes a 50% a.a.

$$1 + i_m = \sqrt[12]{1,50}$$

$$1 + i_m = 1,034366$$

$$\therefore\ i_m = 0,034366 \quad \text{ou} \quad i_m = 3,4366\% \text{ a.m.}$$

$$1 + i_t = \sqrt[4]{1{,}50}$$

$$1 + i_t = 1{,}106682$$

$$\therefore\ i_t = 0{,}106682 \quad \text{ou} \quad i_t = 10{,}6682\%\ \text{a.t.}$$

Como queremos que o valor das prestações seja igual, então:

$$R_m = R_t = R$$

$R_m$ = prestação mensal

$R_t$ = prestação trimestral

Fazendo $R = 1$, teremos:

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$P' = 1 \cdot a_{\overline{12}|3{,}4366}$$

Sendo $P'$ o valor atual de 12 prestações unitárias mensais, à taxa de 3,4366% a.m.

$$P'' = 1 \cdot a_{\overline{4}|10{,}6682}$$

Sendo $P''$ o valor atual de 4 prestações unitárias trimestrais, à taxa de 10,6682% a.t.

A entrada em porcentagem do valor a vista, no caso das prestações trimestrais, será:

$$E = \left[1 - \frac{P''}{P'}\right] 100$$

$$P' = 1 \cdot a_{\overline{12}|3{,}4366}$$

$$a_{\overline{12}|3{,}4366} = \frac{1 - (1{,}034366)^{-12}}{0{,}034366} = 9{,}699490$$

$$P' = 1\,(9{,}699490) = 9{,}699490$$

$$P'' = 1 \cdot a_{\overline{4}|10{,}6682}$$

$$a_{\overline{4}|10{,}6682} = \frac{1 - (1{,}106682)^{-4}}{0{,}106682} = 3{,}124553$$

$$P'' = 1\,(3{,}124553) = 3{,}124553$$

Portanto, a entrada ($E$) deverá ser:

$$E = \left[1 - \frac{3{,}124553}{9{,}699490}\right] 100$$

$E$ = 67,79% do preço a vista.



13. Uma imobiliária oferece, em lançamento, uma pequena chácara nas seguintes condições:

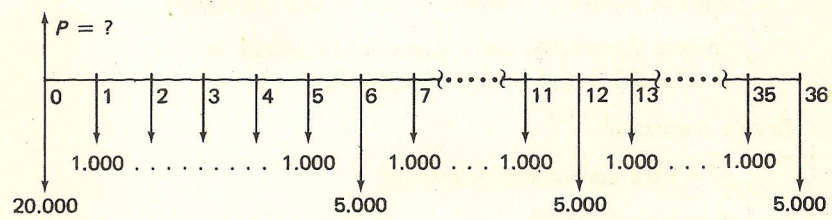
a) Cr$ 20.000,00 = entrada

b) Cr$ 1.000,00 = 36 prestações mensais

c) Cr$ 4.000,00 = 6 parcelas semestrais

Qual é o preço a vista da chácara, uma vez que a taxa de mercado é de 3% a.m.?

*Resolução:*




No caso de parcelas intermediárias periódicas, como neste problema, calculamos a taxa equivalente para o período a que se referem as parcelas, procedendo-se a seguir à resolução do problema.

*Taxa semestral* ($i_s$):

$$1 + i_s = (1{,}03)^6$$

$$1 + i_s = 1{,}194052$$

$$\therefore\ i_s = 0{,}194052 \quad \text{ou} \quad i_s = 19{,}4052\%\ \text{a.s.}$$

Então o valor atual na data 0 (preço a vista) será de:

$$P = 20.000 + 1.000 \cdot a_{\overline{36}|3} + 4.000 \cdot a_{\overline{6}|19{,}4052}$$

$$a_{\overline{36}|3} = 21{,}832253$$

$$a_{\overline{6}|19{,}4052} = \frac{1 - (1{,}194052)^{-6}}{0{,}194052} = 3{,}375214$$

Portanto:

$$P = 20.000 + 1.000\,(21{,}832253) + 4.000\,(3{,}375214)$$

$$P = \text{Cr\$}\ 55.333{,}11$$

14. Uma casa é posta à venda por Cr$ 500.000,00 a vista. Financiada, ela é vendida por 50% de entrada e o restante em 48 prestações mensais a

juros de 2,5% a.m. Tendo encontrado certa dificuldade em vendê-la, o construtor resolveu também financiar 80% do valor referente à entrada, facilitando em 4 parcelas trimestrais iguais, à mesma taxa de juros. Qual é o valor da entrada, da parcela trimestral e da prestação mensal?

*Resolução:*

a) Saldo em 48 meses = Cr$ 250.000,00

b) Entrada = Cr$ 250.000,00

. entrada efetiva = 250.000 X 0,2 = Cr$ 50.000,00

. entrada financiada: em 4 parcelas trimestrais =
= 250.000 X 0,8 = Cr$ 200.000,00

*Parcela trimestral*

$i_t$ = taxa equivalente trimestral

$1 + i_t = (1{,}025)^3$

$1 + i_t = 1{,}076891$

$\therefore\ i_t = 0{,}076891$ ou $i_t = 7{,}6891\%$ a.t.

$P = 200.000$

$i = 7{,}6891\%$ a.t.

$n = 4$ trimestres

$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$

$$200.000 = R \cdot \left[\frac{1 - (1{,}076891)^{-4}}{0{,}076891}\right]$$

$200.000 = R(3{,}335178)$

$$R = \frac{200.000}{3{,}335178} = \text{Cr\$ } 59.966{,}81$$

*Prestação mensal*

$P = 250.000$

$i = 2{,}5\%$ a.m.

$n = 48$ meses

$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$

$250.000 = R \cdot a_{\overline{48}|2{,}5}$



$250.000 = R(27{,}773154)$

$$R = \frac{250.000}{27{,}773154} = \text{Cr\$ } 9.001{,}50$$

Portanto, o plano de venda será o seguinte:

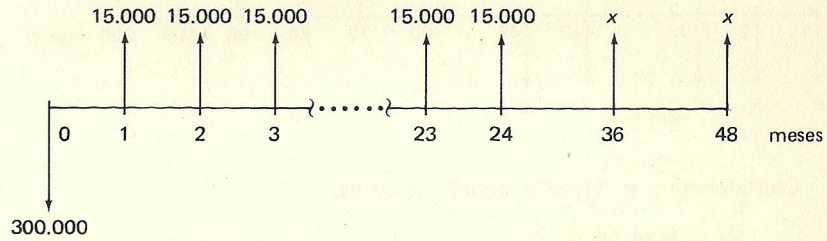
a) Cr$ 50.000,00 = entrada

b) Cr$ 59.966,81 = 4 parcelas trimestrais

c) Cr$ 9.001,50 = 48 prestações mensais

15. Um economista, tendo recebido Cr$ 300.000,00 como prêmio de loteria, imaginou o seguinte esquema: "Aplico este dinheiro em uma instituição que pague 2% a.m. e durante os próximos 24 meses efetuo retiradas mensais de Cr$ 15.000,00. O saldo será retirado em 2 parcelas anuais iguais, a primeira 1 ano após o último saque mensal e a segunda no ano seguinte." Qual será o valor das retiradas anuais?

*Resolução:*




Podemos resolver este problema por cálculo de valor atual ou de montante das parcelas ou por um sistema misto, tudo dependendo da data focal escolhida.

*Data Focal 0* – trazendo todos os valores para data 0

$300.000 = 15.000 \cdot a_{\overline{24}|2} + x(1{,}02)^{-36} + x(1{,}02)^{-48}$

$300.000 = 15.000(18{,}913926) + x(0{,}490223) + x(0{,}386538)$

$300.000 = 283.708{,}89 + x(0{,}490223 + 0{,}386538)$

$$x = \frac{16.291{,}11}{0{,}876761} = \text{Cr\$ } 18.581{,}02$$

*Data Focal 24*

$300.000(1{,}02)^{24} = 15.000 \cdot S_{\overline{24}|2} + x(1{,}02)^{-12} + x(1{,}02)^{-24}$

$$300.000(1{,}608437) = 15.000(30{,}421862) + x(0{,}788493) + x(0{,}621721)$$

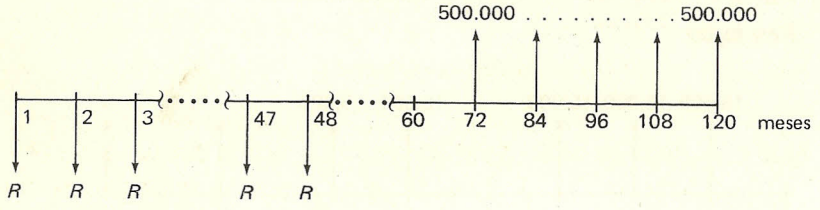
$$482.531{,}10 = 456.327{,}93 + x(0{,}788493 + 0{,}621721)$$

$$x = \frac{26.203{,}17}{1{,}410214} = \text{Cr\$ } 18.580{,}99$$

**Nota:** A diferença nos resultados se prende a arredondamentos.

16. Um executivo, prevendo sua aposentadoria, resolve efetuar, durante 4 anos, depósitos mensais iguais à taxa de 2,5% a.m. Este pecúlio deverá permitir 5 retiradas anuais de Cr$ 500.000,00, ocorrendo a primeira 2 anos após o último depósito. De quanto devem ser os depósitos mensais?

*Resolução:*




Considerando as retiradas anuais, teremos:

$i_a$ = taxa anual

$1 + i_a = (1{,}025)^{12}$

$1 + i_a = 1{,}344889$

$\therefore\ i_a = 0{,}344889$ ou $i_a = 34{,}4889\%$ a.a.

Então:

$R = 500.000$

$i = 34{,}4889\%$ a.a.

$n = 5$ anos

$$P_{60} = 500.000 \cdot a_{\overline{5}|34{,}4889}$$

$$P_{60} = 500.000 \cdot \frac{1 - (1{,}344889)^{-5}}{0{,}344889}$$

$$P_{60} = 500.000(2{,}240479) = \text{Cr\$ } 1.120.239{,}50$$



Portanto, o montante dos depósitos deve somar Cr$ 1.120.239,50 no mês 60, ou seja, ao fim do 5º ano do início dos depósitos.

Como os depósitos cessam ao fim do 48º mês, então devemos trazer o valor calculado no 60º mês para o mês 48 e a este valor deve igualar o montante dos depósitos:

$$P_{48} = P_{60}(1{,}025)^{-12}$$

$$P_{48} = 1.120.239{,}50(0{,}743556) = \text{Cr\$ } 832.960{,}80$$

mas

$$P_{48} = R \cdot S_{\overline{48}|2{,}5}$$

$$832.960{,}80 = R \cdot S_{\overline{48}|2{,}5}$$

$$832.960{,}80 = R(90{,}859582)$$

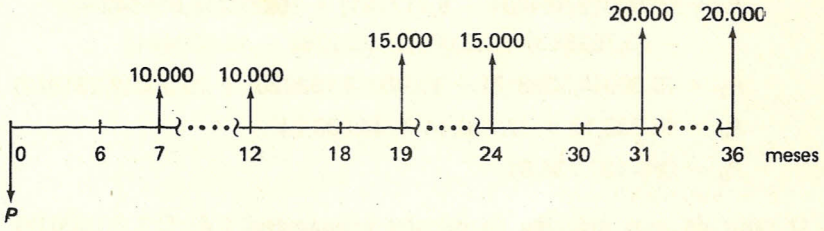
$$R = \frac{832.960{,}80}{90{,}859582} = \text{Cr\$ } 9.167{,}56$$

sendo este o valor dos 48 depósitos mensais.

17. Quanto deve ser depositado em 31/12/76 de maneira que seja possível retirar mensalmente Cr$ 10.000,00 em 1977, Cr$ 15.000,00 em 1978 e Cr$ 20.000,00 em 1979? Considerar que as retiradas serão processadas de julho a dezembro apenas e que os depósitos serão remunerados a 3% a.m.

*Resolução:*

Tomando dezembro de 1976 como sendo a data 0, teremos o seguinte diagrama de valores datados:




O depósito inicial ($P$) nada mais é do que a soma dos valores atuais das retiradas, à taxa de 3% a.m.

Assim, calculando-se o valor atual de cada série, vem:

$$P_6 = 10.000 \cdot a_{\overline{6}|3},\ \text{sendo } P'_0 = P_6(1{,}03)^{-6}$$

$P_{18} = 15.000 \cdot a_{\overline{6}|3}$, sendo $P_0'' = P_{18}(1,03)^{-18}$

$P_{30} = 20.000 \cdot a_{\overline{6}|3}$, sendo $P_0''' = P_{30}(1,03)^{-30}$

Então:

$$P_0 = P_0' + P_0'' + P_0'''$$

Portanto:

$$P_0' = 10.000 \cdot a_{\overline{6}|3}(1,03)^{-6}$$

$$P_0' = 10.000(5,417191)(0,837484) = 45.368,11$$

$$P_0'' = 15.000 \cdot a_{\overline{6}|3}(1,03)^{-18}$$

$$P_0'' = 15.000(5,417191)(0,587395) = 47.730,46$$

$$P_0''' = 20.000 \cdot a_{\overline{6}|3}(1,03)^{-30}$$

$$P_0''' = 20.000(5,417191)(0,411987) = 44.636,25$$

$$P_0 = 45.368,11 + 47.730,46 + 44.636,25$$

$$P_0 = \text{Cr\$ } 137.734,82$$

Conforme foi visto anteriormente, poderíamos resolver este problema por diferença dos fatores de valor atual ($a_{\overline{n}|i}$), descontando as anuidades inexistentes.

Assim:

$$P_0 = 10.000\left[a_{\overline{12}|3} - a_{\overline{6}|3}\right] + 15.000\left[a_{\overline{24}|3} - a_{\overline{18}|3}\right] + \\ + 20.000\left[a_{\overline{36}|3} - a_{\overline{30}|3}\right]$$

$$P_0 = 10.000[9,954004 - 5,417191] + 15.000[16,935542 + \\ - 13,753513] + 20.000[21,832253 - 19,600441]$$

$$P_0 = 10.000(4,536813) + 15.000(3,182029) + 20.000(2,231812)$$

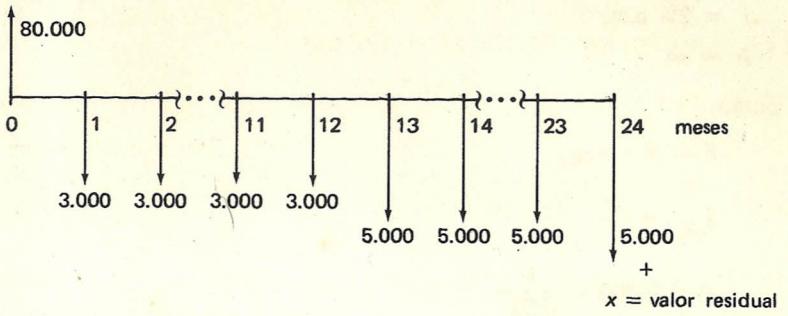
$$P_0 = 45.368,13 + 47.730,44 + 44.636,24$$

$$P_0 = \text{Cr\$ } 137.734,81$$

18. O valor de uma máquina de calcular programável é de Cr$ 80.000,00. Como alternativa o fornecedor aluga a máquina por 2 anos, sendo de Cr$ 3.000,00 o aluguel mensal no 1º ano e de Cr$ 5.000,00 o aluguel mensal no 2º ano, vencendo o aluguel ao fim de cada mês. A máquina, ao término do contrato, é vendida ao cliente por seu valor residual. Qual é o valor residual da máquina, se a taxa de juros considerada na operação for de 2,5% a.m.?



*Resolução:*




Temos que:

$P_0 = 80.000$

$i = 2,5\%$ a.m.

$R_1 = 3.000$

$n_1 = 12$

$R_2 = 5.000$

$n_2 = 12$

De maneira análoga à do problema anterior, a equação de valor será:

$$80.000 = 3.000 \cdot a_{\overline{12}|2,5} + 5.000 \cdot a_{\overline{12}|2,5}(1,025)^{-12} + \\ + x(1,025)^{-24}$$

$$80.000 = 3.000(10,257765) + 5.000(10,257765)(0,743556) + \\ + x(0,552875)$$

$$80.000 = 30.773,30 + 38.136,11 + x(0,552875)$$

$$x = \frac{11.090,59}{0,552875}$$

$$x = \text{Cr\$ } 20.059,85.$$

Portanto, o valor residual, nas condições apresentadas no problema, será de Cr$ 20.059,85.

19. Um apartamento é alugado por Cr$ 5.000,00 por mês. Sabendo-se que a taxa de juros corrente de mercado é de 2% a.m., qual é o valor deste imóvel?

*Resolução:*

$R = 5.000$

$i = 2\%$ a.m.

$n \to \infty$

Então:

$$P = R \cdot a_{\overline{\infty}|i}$$

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

$$P = 5.000 \cdot \frac{1}{0,02}$$

$$P = \text{Cr\$ } 250.000,00$$

Em termos alternativos, se o proprietário do apartamento o vendesse e aplicasse o dinheiro à taxa de mercado, ganharia:

$250.000 \times 0,02 =$ Cr$ 5.000,00 por mês.

20. Um imóvel é avaliado em Cr$ 1.000.000,00. Seu proprietário está disposto a alugá-lo por Cr$ 15.000,00 mensais, contudo, exige o aluguel antecipadamente. Que taxa de juros mensal está cobrando?

$P = 1.000.000$

$R = 15.000$

$n \to \infty$

$$P = R \cdot a_{\overline{\infty}|i}$$

onde:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

Contudo, como o aluguel é cobrado antecipadamente, temos:

$$P = R + R \cdot a_{\overline{\infty}|i}$$

$$1.000.000 = 15.000 + 15.000 \cdot \frac{1}{i}$$

$$i = \frac{15.000}{985.000}$$

$$\therefore i = 0,015228 \quad \text{ou} \quad i \cong 1,52\% \text{ a.m.}$$



21. Pedro vende a seu amigo um carro usado, permitindo que este lhe pague conforme puder no prazo de um ano, sendo cobrados juros de 1% a.m. sobre o saldo devedor. João recebe os seguintes pagamentos:

Cr$ 5.000,00 de entrada

Cr$ 4.000,00 a 1 mês

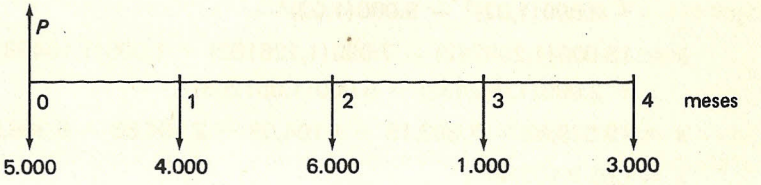
Cr$ 6.000,00 a 2 meses

Cr$ 1.000,00 a 3 meses

Cr$ 3.000,00 a 4 meses

Qual é o valor do carro a vista, uma vez que estes pagamentos saldaram toda a dívida?

*Resolução:*




Nesta situação em que as anuidades são variáveis, não se pode aplicar nenhuma fórmula especial; portanto, devemos calcular o valor atual de cada termo, à taxa de 1% a.m.

$$P = 5.000 + 4.000(1,01)^{-1} + 6.000(1,01)^{-2} + 1.000(1,01)^{-3} + \\ + 3.000(1,01)^{-4}$$

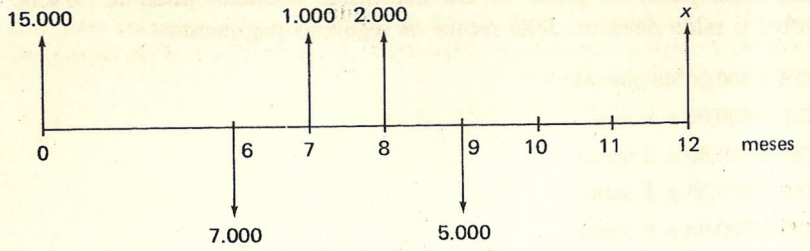
$$P = 5.000 + 4.000\,(0,990099) + 6.000\,(0,980296) + \\ + 1.000\,(0,970590) + 3.000\,(0,960980)$$

$$P = 5.000 + 3.960,40 + 5.881,78 + 970,59 + 2.882,94$$

$$P = \text{Cr\$ } 18.695,71.$$

22. Uma pessoa abre uma conta em uma instituição financeira que paga 2% a.m. sobre o saldo credor, depositando Cr$ 15.000,00. Após 6 meses, necessitando de dinheiro, retira Cr$ 7.000,00. Nos dois meses seguintes, deposita, sendo Cr$ 1.000,00 no primeiro e Cr$ 2.000,00 no segundo. Trinta dias após o último depósito, o correntista efetua um saque de Cr$ 5.000,00. Qual é o saldo desta conta, um ano após sua abertura?

*Resolução:*




Como nos interessa o saldo na data 12, podemos somar todos os valores, atribuindo sinal positivo para os depósitos e negativo para as retiradas; considerando-se naturalmente sua equivalência, à taxa de 2% a.m.

$$x = 15.000(1,02)^{12} - 7.000(1,02)^{6} + 1.000(1,02)^{5} + 2.000(1,02)^{4} - 5.000(1,02)^{3}$$

$$x = 15.000(1,268242) - 7.000(1,126162) + 1.000(1,104081) + 2.000(1,082432) - 5.000(1,061208)$$

$$x = 19.023,63 - 7.883,13 + 1.104,08 + 2.164,86 - 5.306,04$$

$$x = \text{Cr\$ } 9.103,40$$

## 8. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Em um anúncio de uma loja de vendas a crédito informa-se que, pela compra de certo televisor, o cliente pagará 12 prestações mensais de Cr$ 119,96, vencendo a primeira prestação no fim do 6º mês. Qual será o preço a vista deste aparelho, se a taxa de juros for de 3% a.m.?

2. De quanto deve ser a prestação mensal de um eletrodoméstico, cujo preço a vista é de Cr$ 5.000,00, se a primeira prestação ocorrer 3 meses após a compra? Considerar a taxa de 2% a.m. e um total de 22 prestações.

   Obs.: carência de 3 meses.

3. Um clube vende títulos de sócio mediante uma entrada de Cr$ 500,00 e 36 prestações mensais de Cr$ 200,00. Para facilitar a venda, permite uma carência de até 4 meses, para o pagamento da 1ª prestação. Qual é o valor do título, uma vez que a taxa de juros de mercado é de 2,5% a.m.?

4. Na venda de um carro a revendedora propõe o seguinte esquema:

   a) Entrada de Cr$ 10.000,00 mais 24 prestações de Cr$ 1.500,00;

   b) Entrada de Cr$ 10.000,00 mais 24 prestações de Cr$ 1.722,00 com carência de 6 meses.

   Qual será a melhor opção, se a taxa de juros vigente for de 3,5% a.a.?



5. O gerente financeiro de um magazine, atendendo à nova política de vendas (a prazo, com carência), resolve publicar os coeficientes para facilitar o trabalho do vendedor no cálculo do valor das prestações. Estes coeficientes serão aplicados sobre cada unidade de capital financiado, correspondendo à taxa de 4% a.m. Calcular os coeficientes nas seguintes hipóteses:

| | Carência | Nº de prestações mensais |
|---|---|---|
| a) | 3 meses | 12 |
| b) | 3 meses | 24 |
| c) | 4 meses | 24 |
| d) | 6 meses | 24 |

6. Uma pessoa resolve efetuar depósitos mensais de Cr$ 100,00 durante 3 anos em um banco que paga 1,5% a.m. Os depósitos serão feitos todo fim de mês, de janeiro a junho apenas. Quanto possuirá esta pessoa no dia 31 de dezembro do último ano de depósitos?

7. O contrato de venda de uma casa foi assinado dia 31 de dezembro de 1975, quando então o comprador deu Cr$ 50.000,00 de entrada comprometendo-se a pagar mensalmente por 2 anos, de 30 de abril a 31 de dezembro, 18 prestações de Cr$ 4.000,00. Qual será o valor a vista da casa, se a taxa de juros vigente for de 4,5% a.m.?

8. Se um investidor optar por efetuar depósitos apenas nos três últimos meses de cada ano, quanto deverá depositar mensalmente para que, ao fim de 4 anos, possua Cr$ 500.000,00 em uma instituição que paga 3% a.m. sobre saldo credor?

9. A compra de um apartamento no valor de Cr$ 250.000,00 foi feita mediante a entrada de 20% e o restante em prestações trimestrais durante 5 anos. Qual é o valor da prestação, já que a taxa acertada foi de 1,5% a.m.?

10. Qual é a prestação mensal de um jogo de sala, cujo preço a vista é de Cr$ 15.000,00? Considerar o prazo de 24 meses e a taxa de 6% ao quadrimestre.

11. O seguro de um automóvel por 1 ano pode ser pago a vista por Cr$ 5.400,00 ou em 12 parcelas mensais de Cr$ 513,09, sendo a primeira na assinatura do contrato e as demais a cada 30 dias. Que taxa de juros anual efetiva está sendo cobrada?

12. No plano de venda de uma chácara constava uma entrada de Cr$ 10.000,00 mais 60 prestações mensais de Cr$ 500,00, juntamente com 10 parcelas semestrais de Cr$ 2.000,00. Qual seria o preço a vista da chácara, se, conforme disse o corretor, os juros fossem de 30% a.a.?

13. A compra de um carro foi feita a prazo em 8 prestações trimestrais de Cr$ 3.000,00. O comprador, entretanto, solicitou o pagamento em 24 parcelas mensais, para que houvesse diluição dos compromissos. De quanto deveriam ser as prestações mensais, uma vez que a taxa de juros era de 7,689% a.t.?

14. Na venda de um imóvel, o proprietário pede Cr$ 100.000,00 de entrada, 36 prestações mensais de Cr$ 3.000,00 e 3 parcelas anuais de Cr$ 20.000,00. Uma contraproposta lhe é feita no seguinte esquema: entrada de Cr$ 80.000,00, 12 prestações

mensais de Cr$ 4.000,00, seguidas de mais 12 prestações mensais de Cr$ 9.000,00. Sabendo-se que a taxa de juros vigente é de 2,5% a.m., qual é a melhor alternativa para o vendedor?

15. Tendo comprado um eletrodoméstico em 24 prestações mensais de Cr$ 210,00, o cliente propôs sua substituição para 12 prestações bimestrais. Qual será o valor desta nova prestação, se a taxa de juros considerada for de 2% a.m.?

16. Que taxa de juros anual transforma 36 prestações mensais de Cr$ 100,00 em 12 prestações trimestrais de Cr$ 309,09?

17. O preço a vista de um carro é de Cr$ 51.000,00. A revendedora concede carência de 6 meses, sendo o financiamento pago em 24 prestações mensais de Cr$ 2.094,64. Qual deverá ser a entrada, se os juros forem de 3% a.m.?

18. Uma pessoa planeja formar um pecúlio mediante depósitos mensais de Cr$ 200,00 em um banco que paga 2,5% a.m., para que possa futuramente efetuar 20 saques trimestrais de Cr$ 1.940,07, ocorrendo o 1º saque 3 meses após o último depósito. Quantos depósitos deverão ser feitos?

19. O aluguel mensal de uma casa é de Cr$ 3.000,00. Considerando-se que a taxa de mercado é de 2% a.m., qual é o valor desta casa?

20. O proprietário de um apartamento deseja alugá-lo por Cr$ 15.000,00 mensais exigindo, contudo, que o aluguel seja pago com 1 mês de antecedência. Sabendo-se que a taxa de juros vigente é de 2,5% a.m., qual é o valor deste imóvel?

21. Se o valor venal de um ponto de comércio for de Cr$ 100.000,00 e seu proprietário desejar alugá-lo, de quanto deverá ser o aluguel mensal, uma vez que a remuneração de mercado é de 3% a.m.?

22. Um aposentado recebe mensalmente uma pensão de Cr$ 2.000,00. Qual seria o valor de sua aposentadoria, se os juros de mercado fossem de 2% a.m.?

23. Uma empresa aluga sua copiadora por Cr$ 3.500,00 por mês, durante 24 meses. Ao término deste prazo venderá o equipamento ao locatário, caso este deseje, por Cr$ 10.000,00. Se considerarmos que os juros correntes são de 2,5% a.m., qual será o preço a vista desta copiadora?

24. A empresa Beta quer alugar um equipamento, cujo preço a vista é de Cr$ 300.000,00. As condições do fornecedor são: 36 prestações mensais, sendo o valor residual após o pagamento da 36ª prestação igual a Cr$ 51.274,19. Se a taxa considerada for de 1,5% a.m., qual será o valor da prestação mensal?

25. Uma pessoa comprou um televisor a prazo em 24 prestações mensais. O valor a vista da TV era de Cr$ 3.500,00. Após ter pago 4 prestações, por questões de viagem deixou de pagar 6 meses, quando então foi à loja e pediu para liquidar todo o seu débito, isto é, as prestações vencidas e vincendas. O gerente da loja aceitou tal proposta, notificando que a taxa de juros considerada seria de 3% a.m. Qual é o valor do débito?

26. Certa pessoa abre uma conta em um banco que paga 2% a.m., com depósito inicial de Cr$ 5.000,00. Após 6 meses inicia uma série de 20 depósitos mensais de Cr$ 150,00, interrompendo-a por 4 meses, para novamente reiniciá-la com 6 depósitos trimestrais de Cr$ 600,00. Quanto possui após o último depósito trimestral e que depósito inicial e único geraria o mesmo montante ao fim do mesmo período?

27. Em uma instituição que paga 2,5% a.m. foram feitos 6 depósitos mensais, que pela ordem cronológica foram: Cr$ 300,00, Cr$ 100,00, Cr$ 50,00, Cr$ 500,00, Cr$ 200,00, Cr$ 400,00. Qual é o montante após o último depósito?

28. Um terreno é vendido mediante entrada de Cr$ 10.000,00 e 3 parcelas, sendo a primeira de Cr$ 2.000,00 para 3 meses, a segunda de Cr$ 6.000,00 para 8 meses e a última de Cr$ 20.000,00 para 12 meses. Sabendo-se que a taxa vigente no mercado é de 35% a.a., qual é o preço a vista do terreno?



## Respostas

1. Cr$ 1.000,00
2. Cr$ 300,49
3. Cr$ 4.768,16
4. A alternativa b) é a melhor, pois possui menor valor atual (preço a vista).
5. a) 0,119857
   b) 0,073776
   c) 0,076727
   d) 0,082988
6. Cr$ 2.469,33
7. Cr$ 90.502,20
8. Cr$ 21.988,43
9. Cr$ 15.465,74
10. Cr$ 746,03
11. 34,18% a.a.
12. Cr$ 36.952,78
13. Cr$ 975,38
14. A contraproposta não interessa ao vendedor, pois possui menor valor atual (preço a vista).
    Proposta: Cr$ 204.819,25
    Contraproposta: Cr$ 189.676,05
15. Cr$ 424,20
16. 42,58% a.a.
17. Cr$ 21.291,20
18. 50 depósitos
19. Cr$ 150.000,00
20. Cr$ 615.000,00
21. Cr$ 3.000,00
22. Cr$ 100.000,00
23. Cr$ 68.126,20
24. Cr$ 9.761,15
25. Cr$ 3.671,32
26. Montante = Cr$ 21.457,71 e depósito inicial = Cr$ 8.977,92.
27. Cr$ 1.633,96
28. Cr$ 31.582,30.

# Apêndice

## 1. ANUIDADES DIFERIDAS

### 1.1. Anuidades diferidas postecipadas

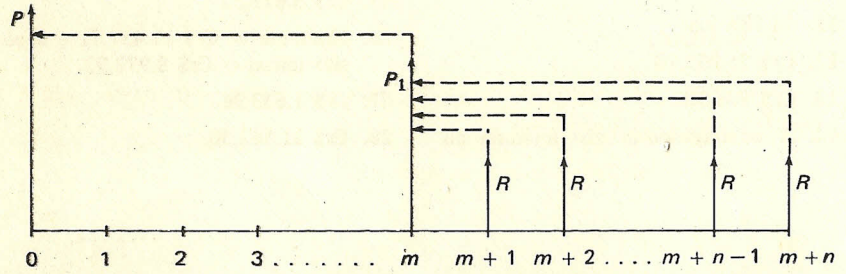
Seja uma anuidade que apresente um diferimento (carência) igual a $m$ períodos e que seja:

- temporária,
- constante,
- postecipada,
- periódica.

#### 1.1.1. Valor atual

Seja $P$ um principal na data zero, a ser pago em $n$ termos iguais a $R$, postecipados e periódicos, com um diferimento de $m$ períodos. Admitamos que a taxa de juros $i$ esteja referida ao período dos termos:

A representação gráfica é a seguinte:




O *valor atual* da anuidade pode ser calculado em duas etapas:

a) Calcula-se o valor atual ($P_1$) na data focal $m$, da anuidade de $n$ termos postecipados, nas mesmas condições, portanto, do *modelo básico*:



$$P_1 = \sum_{j=1}^{n} R(1+i)^{-j} \qquad P_1 = R \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{-j}$$

$$P_1 = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

b) Calcula-se o valor atual ($P$) na data focal zero, do montante $P_1$:

$$P = \frac{P_1}{(1+i)^m}$$

Portanto, $$\boxed{P = \frac{R \cdot a_{\overline{n}|i}}{(1+i)^m}}$$

Este resultado pode ser obtido diretamente quando se considera uma anuidade de $(m + n)$ termos, se calcula o seu valor atual na data zero e depois se subtrai o valor atual na data zero dos *primeiros* $m$ termos, que "não existem":

$$P = R\,a_{\overline{m+n}|i} - R\,a_{\overline{m}|i} = R\left[a_{\overline{m+n}|i} - a_{\overline{m}|i}\right] =$$

$$= R\left[\frac{(1+i)^{m+n} - 1}{i(1+i)^{m+n}} - \frac{(1+i)^m - 1}{i(1+i)^m}\right] =$$

$$= \frac{R}{(1+i)^m}\left[\frac{(1+i)^{m+n} - 1}{i(1+i)^n} - \frac{(1+i)^m - 1}{i}\right] =$$

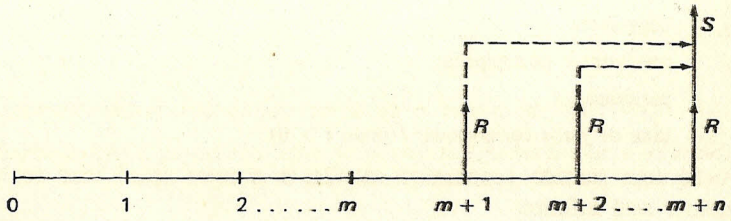
$$= \frac{R}{(1+i)^m}\left[\frac{\cancel{(1+i)^{m+n}} - 1 - \cancel{(1+i)^{m+n}} + (1+i)^n}{i(1+i)^n}\right] =$$

$$= \frac{R}{(1+i)^m}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] = \frac{R \cdot a_{\overline{n}|i}}{(1+i)^m}$$

#### 1.1.2. Montante

Admitindo-se a anuidade já definida no exemplo anterior, seja $S$ o montante que se quer obter.

A representação gráfica é a seguinte:



Queremos obter, portanto, o montante de $n$ termos iguais a $R$, postecipados e periódicos. Este montante é o próprio montante já obtido no *modelo básico*.

$$S = RS_{\overline{n}|i}$$

Uma vez que o diferimento ($m$) não altera o cálculo do montante da anuidade em relação à data focal $m + n$, tal qual foi feita para o modelo básico.

### 1.2. Anuidades diferidas antecipadas

Como já foi demonstrado, a anuidade *antecipada* pode ser entendida como sendo uma anuidade *postecipada* multiplicada por $(1 + i)$, quer se trate do montante ou do valor atual.

Nestas condições, tem-se:

#### 1.2.1. Valor atual

$$P = \frac{R(1 + i)a_{\overline{n}|i}}{(1 + i)^m}$$

Ou:

$$P = \frac{R \cdot a_{\overline{n}|i}}{(1 + i)^{m-1}}$$

#### 1.2.2. Montante

$$S = R(1 + i)S_{\overline{n}|i}$$

## 2. ANUIDADES PERPÉTUAS

Vejamos, a título de ilustração, as anuidades perpétuas que sejam:

- constantes,
- imediatas e postecipadas,
- periódicas,
- taxa de juros considerada: $i$ (onde $i > 0$).

Só tem sentido econômico calcular-se o *valor atual*, uma vez que o montante será infinito.



Sendo $P$ um principal a ser pago em *infinitos* termos iguais a $R$, nas condições dadas, tem-se o *valor atual*:

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} R(1 + i)^{-j}$$

$$P = R \sum_{j=1}^{\infty} (1 + i)^{-j}$$

Colocando:

$$a_{\infty|i} = \sum_{j=1}^{\infty} (1 + i)^{-j} = \frac{1}{(1 + i)} + \frac{1}{(1 + i)^2} + \ldots$$

Temos a soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada de razão $q < 1$, que vale:

$$a_{\infty|i} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{a_1 - a_n q}{1 - q}\right] = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q}\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{a_1}{1 - q}\right] - \lim_{n \to \infty} \left[\frac{a_1 q^n}{1 - q}\right] = \frac{a_1}{1 - q}$$

Como:

$$a_1 = (1 + i)^{-1}$$

$$q = (1 + i)^{-1}$$

Temos:

$$a_{\infty|i} = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{(1 + i)^{-1}}{1 - (1 + i)^{-1}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{(1 + i)}}{1 - \frac{1}{(1 + i)}} = \frac{1}{1 + i} \cdot \frac{1 + i}{i} = \frac{1}{i} \quad \therefore \quad a_{\infty|i} = \frac{1}{i}$$

Logo:

$$P = R \cdot a_{\infty|i}$$

$$P = \frac{R}{i}$$

## 3. ANUIDADES VARIÁVEIS

São as anuidades cujos termos não são iguais entre si.

Vejamos as anuidades variáveis que sejam

- temporárias,
- imediatas e postecipadas,
- periódicas.

Admitamos que a anuidade tenha termos iguais a $R_j \{j = 1 \ldots n\}$.

Sendo $i$ a taxa de juros adotada, referida ao mesmo período dos termos e sendo $P$ o valor atual dos termos na data zero, tem-se por definição de valor atual:

$$P = \frac{R_1}{(1+i)^1} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R_n}{(1+i)^n}$$

Ou, de modo análogo:

$$P = R_1(1+i)^{-1} + R_2(1+i)^{-2} + \ldots + R_n(1+i)^{-n}$$

Ou, utilizando a notação de somatório:

$$\boxed{P = \sum_{j=1}^{n} R_j(1+i)^{-j}}$$

Obtido o valor atual na data zero, o montante pode ser obtido diretamente:

$$\boxed{S = P(1+i)^n}$$

## 4. ANUIDADE VARIÁVEL NÃO-PERIÓDICA

O valor atual é obtido pela soma, em uma determinada data focal, dos valores atuais de cada termo, valores estes obtidos pelo desconto à taxa $i$ aplicada ao intervalo de tempo correspondente (ou seja, o intervalo que vai da data focal à data em que se encontra o termo a ser descontado).

O montante é obtido de modo análogo pela soma dos montantes de cada termo ou, simplesmente, calculando-se o montante do valor atual da anuidade.



# 9
# Empréstimos

Em termos financeiros, a dívida surge quando uma dada importância é emprestada por um certo prazo. Quem assume a dívida obriga-se a restituir o principal mais os juros devidos, no prazo estipulado.

Segundo as práticas habituais, os empréstimos classificam-se em: de curto, de médio e de longo prazo.

Os empréstimos *de curto e de médio prazo* caracterizam-se, normalmente, por serem saldados em até 3 anos. Os problemas relacionados com tais tipos de empréstimos são aqueles já abordados em anuidades e não serão vistos neste capítulo.

Os empréstimos *de longo prazo* sofrem um tratamento especial porque existem várias modalidades de restituição do principal e juros. Tais empréstimos, em geral, têm suas condições previamente estipuladas por contratos entre as partes, ou seja, entre o credor e o devedor.

Os problemas mais importantes que surgem nos empréstimos de longo prazo dizem respeito à explicitação do sistema de reembolso adotado e ao cálculo da taxa de juros efetivamente cobrada pelo credor.

Nos sistemas de amortização a serem estudados, os juros serão calculados *sempre* sobre o saldo devedor. Isto significa que consideraremos apenas o regime de *juros compostos*, pois, se os juros são calculados deste modo, o não-pagamento de juros em um dado período levará a um saldo devedor maior, sendo calculado juro sobre juro.

## 1. DEFINIÇÕES

Alguns termos de uso corrente devem ser explicitados para maior clareza posterior:

a) *Mutuante ou credor:* aquele que dá o empréstimo.

b) *Mutuário ou devedor:* aquele que recebe o empréstimo.

c) *Taxa de juros:* é a taxa de juros contratada entre as partes. Pode referir-se ao custo efetivo do empréstimo ou não, dependendo das condições adotadas.

d) *IOF:* imposto sobre operações financeiras.

e) *Prazo de utilização:* corresponde ao intervalo de tempo durante o qual o empréstimo é transferido do credor para o devedor. Caso o empréstimo seja transferido em uma só parcela, este prazo é dito unitário.

f) *Prazo de carência:* corresponde ao período compreendido entre o prazo de utilização e o pagamento da primeira amortização. Durante o prazo de carência, portanto, o tomador do empréstimo só paga os juros. Considera-se que existe *carência* quando este prazo é superior a, pelo menos, o dobro do menor período de amortização das parcelas. É possível também que as partes concordem em que os juros devidos no prazo de carência sejam capitalizados e pagos posteriormente. Neste caso, não haverá *desembolso* de juros durante a carência.

**Nota:** o leitor deve observar que este conceito de carência não é o utilizado em anuidades postecipadas, mas sim em anuidades antecipadas.

g) *Parcelas de amortização:* corresponde às parcelas de devolução do principal, ou seja, do capital emprestado.

h) *Prazo de amortização:* é o intervalo de tempo, durante o qual são pagas as amortizações.

i) *Prestação:* é a soma da amortização acrescida de juros e outros encargos, pagos em um dado período.

j) *Planilha:* é um quadro, padronizado ou não, onde são colocados os valores referentes ao empréstimo, ou seja, o cronograma dos valores de recebimento e de pagamentos.

k) *Prazo total do financiamento:* é a soma do prazo de carência com o prazo de amortização.

l) *Saldo devedor:* é o estado da dívida, ou seja, do débito, em um determinado instante de tempo.

m) *Período de amortização:* é o intervalo de tempo existente entre duas amortizações sucessivas.

## 2. CLASSIFICAÇÃO DAS MODALIDADES DE AMORTIZAÇÃO

Qualquer um dos sistemas ou modalidades de amortização pode ter, ou não, prazo de carência. Deve-se observar que o chamado sistema americano sempre tem carência, pois o principal é devolvido em uma única vez.



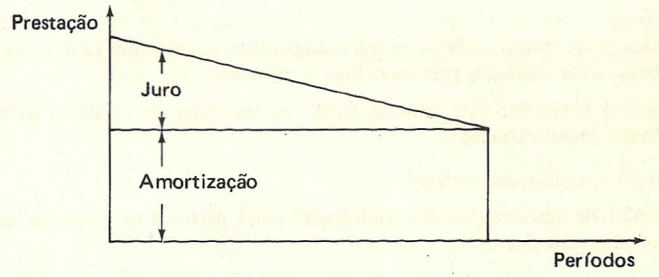
Por seu lado, os juros podem ser pagos ou capitalizados durante o prazo de carência, dependendo de um acerto entre as partes envolvidas no financiamento.

Os principais sistemas de amortização são os seguintes:

a) *Sistemas de amortização constante (SAC)*

As parcelas de amortização são iguais entre si. Os juros são calculados, a cada período, multiplicando-se a taxa de juros contratada (na forma unitária) pelo saldo devedor existente no período anterior.

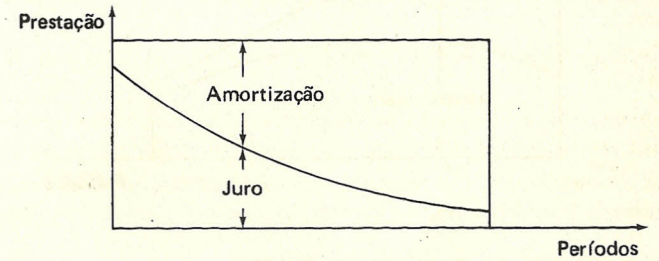
A representação gráfica é a seguinte:




Neste sistema, as prestações são continuamente decrescentes.

b) *Sistema francês*

As prestações são iguais entre si e calculadas de tal modo que uma parte paga os juros e a outra o principal. A dívida fica completamente saldada na última prestação:

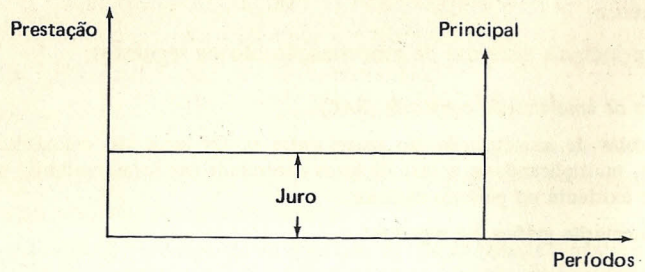



Este sistema, acrescidas certas peculiaridades de cálculo, é também conhecido como Sistema Price.

c) *Sistema americano*

Após um certo prazo o devedor paga, em uma única parcela, o capital emprestado.

A modalidade mais comum é aquela em que o devedor paga juros durante a carência.

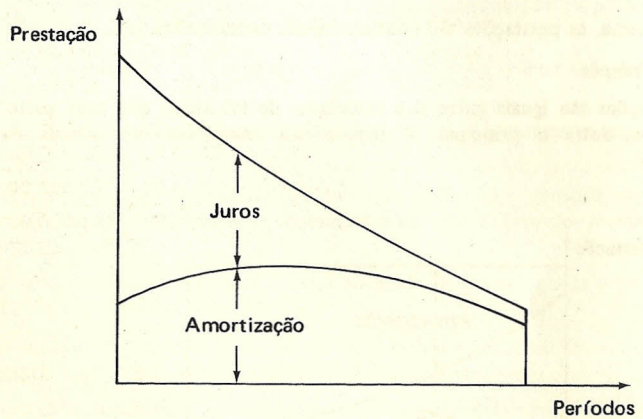



O devedor pode querer *aplicar* recursos disponíveis e gerar um fundo que iguale o desembolso a ser efetuado para amortizar o principal.

Tal fundo é conhecido por "sinking fund" na literatura americana e, na brasileira, por "fundo de amortização".

d) *Sistema de amortizações variáveis*

As parcelas de amortização são contratadas pelas partes e os juros são calculados sobre o saldo devedor.




## 2.1. Sistema de amortização constante (SAC)

Por este sistema o credor exige a devolução do principal em $n$ parcelas iguais, incidindo os juros sobre o saldo devedor.

Vejamos algumas possibilidades associadas a tal modo de se fazer a amortização de dívidas.



### 2.1.1. SAC, com prazo de carência e prazo de utilização unitário

Uma empresa pede emprestado Cr$ 100.000,00 que o banco entrega no ato. Sabendo que o banco concedeu 3 anos de carência, que os juros serão pagos anualmente, que a taxa de juros é de 10% ao ano e que o principal será amortizado em 4 parcelas anuais, construir a planilha.

*Resolução:*

A amortização anual é

$$\frac{100.000,00}{4} = 25.000,00$$

Vamos admitir que o principal fora emprestado no *início* do primeiro ano e que as prestações e os juros sejam pagos no *fim* de cada ano.

Temos:

| *Ano* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | 100.000,00 | – | – | – |
| 1 | – | 100.000,00 | – | 10.000,00 | 10.000,00 |
| 2 | – | 100.000,00 | – | 10.000,00 | 10.000,00 |
| 3 | – | 75.000,00 | 25.000,00 | 10.000,00 | 35.000,00 |
| 4 | – | 50.000,00 | 25.000,00 | 7.500,00 | 32.500,00 |
| 5 | – | 25.000,00 | 25.000,00 | 5.000,00 | 30.000,00 |
| 6 | – | – | 25.000,00 | 2.500,00 | 27.500,00 |
| Total | – | – | 100.000,00 | 45.000,00 | 145.000,00 |

O raciocínio foi o seguinte:

a) Do *início* do primeiro ano (data zero) até o *fim* do terceiro ano, temos 3 períodos, que correspondem à carência.

Logo após terminado o período de carência, temos a primeira amortização de Cr$ 25.000,00.

b) Os juros são calculados sempre sobre o saldo devedor do período anterior.

Ou seja: sendo $J_k$ o juro devido no período $k$, sendo $i$ a taxa de juros e $Sd_{k-1}$ o saldo devedor do período anterior, temos:

$$\boxed{J_k = iSd_{k-1}}$$

Observe, no exemplo, que o juro do período é calculado multiplicando-se a taxa (na forma unitária) pelo saldo devedor do período anterior.

c) A prestação é obtida somando-se, ao final de cada período, a amortização com os juros.

d) A linha de *total* serve para verificar se as somas batem, e portanto, se as contas estão certas.

### 2.1.2. SAC, com prazo de carência, juros capitalizados e prazo de utilização unitário

Em alguns casos, como o da implantação de uma fábrica nova, as partes podem combinar o não-pagamento dos juros durante o período de carência. Diz-se então que os juros foram capitalizados durante a carência. Tudo se passa como se a entidade financiadora tivesse concedido um empréstimo adicional para o pagamento dos juros.

Podemos ter dois casos:

A) As amortizações são calculadas em relação ao valor inicial emprestado e os juros capitalizados são pagos no primeiro ano de amortização.

B) As amortizações são calculadas em relação ao valor inicial emprestado mais os juros capitalizados durante a carência.

Tomando como base o exemplo apresentado no item anterior, vejamos os dois casos:

CASO A

| *Ano* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | 100.000,00 | – | – | – |
| 1 | – | 110.000,00 | – | – | – |
| 2 | – | 121.000,00 | – | – | – |
| 3 | – | 75.000,00 | 25.000,00 | 33.100,00 | 58.100,00 |
| 4 | – | 50.000,00 | 25.000,00 | 7.500,00 | 32.500,00 |
| 5 | – | 25.000,00 | 25.000,00 | 5.000,00 | 30.000,00 |
| 6 | – | – | 25.000,00 | 2.500,00 | 27.500,00 |
| Total | – | – | 100.000,00 | 48.100,00 | 148.100,00 |

Ao saldo devedor, no fim de cada período, foi acrescentado o juro devido, calculado à taxa de 10% a.a. Ao final do 3º ano, os juros capitalizados foram pagos juntamente com a primeira prestação, como no exemplo do item anterior.



**Nota:** Este caso apresenta pouco interesse prático, tendo sido apresentado com fins didáticos.

CASO B

| *Ano* | *Saldo Devedor* | *Amortização* (1) | *Juros* (2) | *Prestação* (1) + (2) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | – | – | – |
| 1 | 110.000,00 | – | – | – |
| 2 | 121.000,00 | – | – | – |
| 3 | 99.825,00 | 33.275,00 | – | 33.275,00 |
| 4 | 66.550,00 | 33.275,00 | 9.982,50 | 43.257,50 |
| 5 | 33.275,00 | 33.275,00 | 6.655,00 | 39.930,00 |
| 6 | – | 33.275,00 | 3.327,50 | 36.602,50 |
| Total | – | 133.100,00 | 19.965,00 | 153.065,00 |

Neste caso, ao fim de cada período foi calculado o juro de 10% sobre o saldo devedor e acrescido ao mesmo.

No terceiro período, o saldo devedor era:

$Sd_3 = 133.100,00$

Portanto, as parcelas de amortização:

$$A = \frac{133.100,00}{4} = 33.275,00$$

O cálculo restante da planilha é processado como no caso anterior. Observe-se que o *fluxo de prestações* é mais uniforme que no caso anterior.

Comparando os *totais das prestações* nos três casos já apresentados, temos para um empréstimo de Cr$ 100.000,00:

SAC (item 4.1): 145.000,00
CASO A: 148.100,00
CASO B: 153.065,00

Aparentemente está havendo um acréscimo no custo total, mas este acréscimo é devido apenas ao fato de que se está amortizando o principal com maior defasagem. Verifique que o *valor atual* das prestações descontadas a 10% a.a. é exatamente igual a Cr$ 100.000,00 e, portanto, o custo do empréstimo é de 10% a.a.

### 2.1.3. SAC, com prazo de carência e prazo de utilização não-unitário

Seja ainda o exemplo do item 2.1.1., mas admitindo-se que o empréstimo de Cr$ 100.000,00 seja dado pelo banco em duas parcelas iguais, defasadas de 1 ano e que as demais condições sejam as mesmas.

A planilha, então, é montada do seguinte modo:

| *Ano* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 50.000,00 | – | – | – |
| 1 | 100.000,00 | – | 5.000,00 | 5.000,00 |
| 2 | 100.000,00 | – | 10.000,00 | 10.000,00 |
| 3 | 75.000,00 | 25.000,00 | 10.000,00 | 35.000,00 |
| 4 | 50.000,00 | 25.000,00 | 7.500,00 | 32.500,00 |
| 5 | 25.000,00 | 25.000,00 | 5.000,00 | 30.000,00 |
| 6 | – | 25.000,00 | 2.500,00 | 27.500,00 |
| Total | – | 100.000,00 | 40.000,00 | 140.000,00 |

O leitor deve comparar esta planilha com aquela obtida no item 2.1.1. e constatar que, à exceção do juro pago após o primeiro período, os demais valores são iguais. Nestas condições o único efeito de um prazo de utilização não-unitário é gerar um fluxo de prestações mais uniforme.

A capitalização dos juros no prazo de carência pode ser feita como já se analisou.

O fato de o *total* das prestações ser inferior aos totais dos casos anteriores também não quer dizer que a taxa seja menor. Ela é exatamente de 10% a.a., como podemos verificar.

a) O valor atual, na data zero, dos desembolsos feitos pelo banco, à taxa de 10% a.a., é:

$$V_B = \frac{50.000,00}{(1,10)^0} + \frac{50.000,00}{(1,10)^1} \cong 95.454,55$$



b) E o valor atual das prestações pagas pelo cliente, nas mesmas condições:

$$V_C = \frac{5.000,00}{(1,10)^1} + \frac{10.000,00}{(1,10)^2} + \frac{35.000,00}{(1,10)^3} + \frac{32.500,00}{(1,10)^4} + \frac{30.000,00}{(1,10)^5} + \frac{27.500,00}{(1,10)^6} \cong 95.454,55$$

Logo, $V_B = V_C$, ou seja, os capitais são *equivalentes* na data zero. Isto quer dizer que o cliente do banco devolveu exatamente o que lhe foi emprestado, à taxa de juros contratada.

## 2.2. Sistema francês (SF)

Por este sistema, o mutuário obriga-se a devolver o principal mais os juros em prestações iguais entre si e periódicas.

Temos de resolver, portanto, dois problemas para construir a planilha: como calcular a prestação e como separar a amortização dos juros.

Vamos admitir, a menos de menção em contrário, que a taxa de juros seja referida ao período de amortização.

### 2.2.1. SF, com prazo de utilização unitário e sem prazo de carência

Um banco empresta Cr$ 100.000,00, entregues no ato, sem prazo de carência. Sabendo que o banco utiliza o sistema francês, que a taxa contratada foi de 10% a.a. e que o banco quer a devolução em 5 prestações, construir a planilha.

*Resolução:*

Se o principal vai ser devolvido em 5 prestações iguais e postecipadas, temos exatamente uma anuidade que se conforma ao nosso modelo básico:

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Ou seja:

$$R = \frac{100.000,00}{a_{\overline{5}|10}} = \frac{100.000,00}{3,790787} \cong 26.379,75$$

Teremos então 5 prestações iguais de Cr$ 26.379,75. Os juros serão calculados do modo já visto no sistema de amortização constante, ou seja, aplicando a taxa de juros ao saldo devedor do período anterior.

A amortização será calculada pela diferença entre a prestação e o juro do período. Por sua vez, o saldo devedor do período será calculado como

sendo a diferença entre o saldo devedor do período anterior e a amortização do período:

| Ano ($k$) | Saldo Devedor ($Sd_k$) | Amortização ($A_k$) | Juros ($J_k = iSd_{k-1}$) | Prestação ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | – | – | – |
| 1 | 83.620,25 | 16.379,75 | 10.000,00 | 26.379,75 |
| 2 | 65.602,53 | 18.017,72 | 8.362,03 | 26.379,75 |
| 3 | 45.783,03 | 19.819,50 | 6.560,25 | 26.379,75 |
| 4 | 23.981,58 | 21.801,45 | 4.578,30 | 26.379,75 |
| 5 | – | 23.981,58 | 2.398,16 | 26.379,74 |
| Total | – | 100.000,00 | 31.898,74 | 131.898,74 |

**Nota:** Fez-se um pequeno acerto no último período.

O procedimento, portanto, é o seguinte:

a) Calcula-se a prestação $R$.

b) Calculam-se para cada período ($k$) os juros sobre o saldo devedor do período anterior:

$$J_k = i \cdot Sd_{k-1}$$

c) Faz-se para cada período ($k$) a diferença entre a prestação e o juro, obtendo-se o valor da amortização:

$$A_k = R - J_k$$

d) A diferença, em cada período ($k$), entre o saldo devedor do período anterior e a amortização do período dá o saldo devedor do período:

$$Sd_k = Sd_{k-1} - A_k$$

### 2.2.2. SF, com prazo de utilização unitário e com prazo de carência

Quando se tem prazo de carência, podem ocorrer duas hipóteses:

*CASO A:* durante a carência o mutuário paga os juros devidos.

*CASO B:* durante a carência, os juros são capitalizados e incorporados ao principal, para serem amortizados nas prestações.



É possível pensar também nos juros como sendo capitalizados e pagos de uma só vez juntamente com a primeira prestação, mas esta modalidade raramente é utilizada nas aplicações práticas.

A fim de ilustrar os dois casos, admitamos o exemplo do item anterior com 3 anos de carência e as demais condições iguais.

*CASO A:*

O procedimento durante o período de carência é o mesmo já visto para o SAC, ou seja, os juros são calculados sobre o saldo devedor.

O cálculo das prestações e a separação entre amortizações e juros se processa como explicado no item anterior:

| Ano ($k$) | Saldo Devedor ($Sd_k$) | Amortização ($A_k$) | Juros ($J_k = iSd_{k-1}$) | Prestação ($R = A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | – | – | – |
| 1 | 100.000,00 | – | 10.000,00 | 10.000,00 |
| 2 | 100.000,00 | – | 10.000,00 | 10.000,00 |
| 3 | 83.620,25 | 16.379,75 | 10.000,00 | 26.379,75 |
| 4 | 65.602,53 | 18.017,72 | 8.362,03 | 26.379,75 |
| 5 | 45.783,03 | 19.819,50 | 6.560,25 | 26.379,75 |
| 6 | 23.981,58 | 21.801,45 | 4.578,30 | 26.379,75 |
| 7 | – | 23.981,58 | 2.398,16 | 26.379,74 |
| Total | – | 100.000,00 | 51.898,74 | 151.898,74 |

**Nota:** Fez-se um pequeno acerto na última prestação para zerar o $Sd$.

A única diferença, portanto, é obtermos um fluxo maior de prestações. O leitor deve calcular o valor atual das prestações à taxa de 10% a.a., na data focal zero e constatar que é igual a Cr$ 100.000,00.

*CASO B:*

Devemos, inicialmente, capitalizar o saldo devedor à taxa de 10% a.a., durante os 2 anos de carência, isto porque a amortização deve começar no fim do 3º ano de carência:

$$S_1 = 100.000,00(1,10) = 110.000,00$$

$$S_2 = 100.000,00(1,10)^2 = 121.000,00$$

Sobre este saldo devedor, calcula-se o valor da prestação:

$$R = \frac{121.000,00}{a_{\overline{5}|10}} = \frac{121.000,00}{3,790787} = 31.919,49$$

A partir da prestação, o cálculo segue o sistema francês como já explicado.

| *Ano* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k = iSd_{k-1}$) | *Prestação* ($R = A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | – | – | – |
| 1 | 110.000,00 | – | – | – |
| 2 | 121.000,00 | – | – | – |
| 3 | 101.180,51 | 19.819,49 | 12.100,00 | 31.919,49 |
| 4 | 79.379,07 | 21.801,44 | 10.118,50 | 31.919,49 |
| 5 | 55.397,49 | 23.981,58 | 7.937,91 | 31.919,49 |
| 6 | 29.017,75 | 26.379,74 | 5.539,75 | 31.919,49 |
| 7 | – | 29.017,75 | 2.901,78 | 31.919,53 |
| Total | – | 121.000,00 | 38.597,94 | 159.597,49 |

**Nota:** Fez-se um pequeno acerto na última prestação.

### 2.2.3. SF, quando o período a que se refere a taxa de juros não coincide com o período a que se refere a amortização

#### 2.2.3.1. PLANILHA CALCULADA COM A TAXA EFETIVA

A resolução da planilha nestas condições se refere ao modelo genérico de anuidade correspondente (ver item 2 do capítulo anterior).

Para o cálculo das prestações, admite-se que o prazo total do financiamento foi dividido em $n$ períodos e que a taxa de juros $i$ está referida a estes períodos. Tendo-se um principal ($P$) e $r$ amortizações ($r < n$), para o cálculo das prestações, deve ser determinada a taxa de juros efetiva ($i^*$) correspondente ao período a que se refere a amortização. Calcula-se então a prestação:

$$R = \frac{P}{a_{\overline{r}|i^*}}$$



A montagem da planilha segue agora o procedimento já visto para o SF.

*Exemplo:* Foi emprestada a importância de Cr$ 100.000,00 para uma empresa a qual deve fazer a amortização em 4 parcelas semestrais pelo SF, sem carência. Sabendo-se que a taxa de juros cobrada é de 12% a.a. e que se vai trabalhar com a taxa efetiva, construir a planilha.

*Resolução:*

A taxa de juros efetiva é:

$$i^* = \sqrt{1,12} - 1 \cong 1,0583 - 1 \cong 0,0583$$

ou

$$i^* = 5,83\% \text{ a.s.}$$

Portanto, com $r = 4$:

$$a_{\overline{4}|5,83} \cong 3,478637$$

Logo:

$$R = \frac{100.000}{3,478637} \cong 28.746,89$$

E a planilha:

| *Semestres* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k = iSd_{k-1}$) | *Prestação* ($R = A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | – | – | – |
| 1 | 77.083,11 | 22.916,89 | 5.830,00 | 28.746,89 |
| 2 | 52.830,17 | 24.252,94 | 4.493,95 | 28.746,89 |
| 3 | 27.163,28 | 25.666,89 | 3.080,00 | 28.746,89 |
| 4 | – | 27.163,28 | 1.583,61 * | 28.746,89 |
| Total | – | 100.000,00 | 14.987,56 | 114.987,56 |

(*) Ajuste.

#### 2.2.3.2. SISTEMA PRICE

Este sistema também é conhecido como "tabela Price" (lê-se "praice") e é um caso particular do sistema francês, com as seguintes características:

a) A taxa de juros contratada é dada em termos nominais. Na prática, esta taxa é dada em termos anuais.

b) As prestações têm período menor que aquele a que se refere a taxa. Em geral, as amortizações são feitas em base mensal.

c) No cálculo é utilizada a taxa proporcional ao período a que se refere a prestação, calculada a partir da taxa nominal.

Deve ficar claro ao leitor que o método ou sistema Price é o SF com as particularidades citadas. E a "tabela Price" nada mais é do que uma tabela contendo os índices mais usuais já levando em conta a taxa de juros proporcional.

*Exemplo:* Um banco emprestou Cr$ 100.000,00, entregues no ato, sem prazo de carência. Sabendo-se que a taxa de juros cobrada pelo banco é de 12% a.a., tabela Price, e que a devolução deve ser feita em 8 meses, construir a planilha.

*Resolução:*

Se o sistema adotado é "tabela Price" e sendo de 12% a.a. a taxa, temos que a taxa proporcional mensal é:

$$i_{12} = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01 \text{ a.m.} \quad \text{ou} \quad i_{12} = 1\% \text{ a.m.}$$

Como são 8 prestações, calculamos:

$$a_{\overline{8}|1} \cong 7{,}651678$$

Portanto:

$$R = \frac{100.000{,}00}{7{,}651678} \cong 13.069{,}03$$

Agora, temos a planilha:

| *Meses* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k = iSd_{k-1}$) | *Prestação* ($R = A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | – | – | – |
| 1 | 87.930,97 | 12.069,03 | 1.000,00 | 13.069,03 |
| 2 | 75.741,25 | 12.189,72 | 879,31 | 13.069,03 |
| 3 | 63.429,63 | 12.311,62 | 757,41 | 13.069,03 |
| 4 | 50.994,90 | 12.434,73 | 634,30 | 13.069,03 |
| 5 | 38.435,82 | 12.559,08 | 509,95 | 13.069,03 |
| 6 | 25.751,15 | 12.684,67 | 384,36 | 13.069,03 |
| 7 | 12.939,63 | 12.811,52 | 257,51 | 13.069,03 |
| 8 | – | 12.939,63 | 129,40 | 13.069,03 |
| Total | – | 100.000,00 | 4.552,24 | 104.552,24 |



O leitor deve observar que, como foi feita a taxa proporcional simples, a taxa de juros composta equivalente anual é maior.

Neste caso, tem-se:

$$1 + i' = (1{,}01)^{12} \cong 1{,}126825$$

A taxa efetiva que está sendo cobrada pelo banco é de 12,68% a.a., ou seja, é um pouco maior que a taxa nominal de 12% a.a. que o banco diz cobrar.

### 2.3. Sistema americano (SA)

Por este sistema o mutuário obriga-se a devolver o principal em uma só parcela, após ter decorrido o prazo de carência estipulado. Os juros podem ser pagos durante a carência ou capitalizados e devolvidos juntamente com o principal.

#### 2.3.1. SA com devolução dos juros durante a carência

Os juros são calculados sobre o saldo devedor.

*Exemplo:* Um banco empresta Cr$ 100.000,00 a uma empresa, a uma taxa de juros de 6% a.s. com prazo de utilização unitário, para ser devolvido após uma carência de 2 anos. Sabendo-se que os juros serão cobrados semestralmente, calcular a planilha pelo sistema americano. Qual é a taxa efetiva anual?

*Resolução:*

Como já é dada a taxa em termos semestrais, temos:

| *Semestres* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | – | – | – |
| 1 | 100.000,00 | – | 6.000,00 | 6.000,00 |
| 2 | 100.000,00 | – | 6.000,00 | 6.000,00 |
| 3 | 100.000,00 | – | 6.000,00 | 6.000,00 |
| 4 | – | 100.000,00 | 6.000,00 | 106.000,00 |
| Total | – | 100.000,00 | 24.000,00 | 124.000,00 |

A taxa efetiva anual é:

$$1 + i_f = (1{,}06)^2 = 1{,}1236$$

Ou seja:

$i_f$ = 12,36% a.a.

### 2.3.2. SA com a capitalização dos juros

Os juros de um período são acrescidos ao saldo devedor. Sobre o novo saldo devedor correm os juros do período seguinte, como já foi visto nos exemplos anteriores.

*Exemplo:* Seja o mesmo exemplo do item anterior, em que se admite a capitalização dos juros durante a carência.

*Resolução:*

| *Semestres* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | – | – | – |
| 1 | 106.000,00 | – | – | – |
| 2 | 112.360,00 | – | – | – |
| 3 | 119.101,60 | – | – | – |
| 4 | – | 100.000,00 | 26.247,70 | 126.247,70 |
| Total | – | 100.000,00 | 26.247,70 | 126.247,70 |

**Nota:** O leitor deve constatar que a taxa efetiva anual continua sendo de 12,36% a.a.

### 2.3.3. "Sinking fund"

O chamado "sinking fund", que muitas vezes é confundido com o "sistema americano", é um *fundo de amortização* que é constituído pelo mutuário para pagar o principal devido, quando o cálculo é feito pelo sistema americano. Com tal providência o mutuário procura evitar o problema de liquidez que surgiria devido a um grande desembolso de uma só vez.

Este fundo é formado aplicando-se recursos de tal modo que, na data de pagamento do principal, o valor do fundo de amortização seja igual ao desembolso a ser efetuado.

Admitindo que o fundo resulte da aplicação de parcelas iguais, periódicas, postecipadas e sem carência a partir do recebimento do empréstimo, resta o problema da taxa de juros.

Teoricamente, a *taxa de juros de aplicação* pode ser:

a) *maior* que a taxa de empréstimo;



b) *igual* à taxa de empréstimo;

c) *menor* que a taxa de empréstimo.

Via de regra, nas operações financeiras normais, tem-se o *caso c*, ou seja, a taxa de juros de aplicação é menor que a taxa de juros que foi cobrada pelo empréstimo recebido.

Admitindo-se esta hipótese, sendo $i_a$ a taxa de juros de aplicação com $n$ períodos, um montante $S$ (igual ao principal) e sendo $R$ o depósito por período, tem-se:

$$S = R \cdot s_{\overline{n}|i_a}$$

Ou

$$\boxed{R = \frac{S}{s_{\overline{n}|i_a}}}$$

Isto porque os depósitos $R$ formam uma anuidade postecipada, constante, de $n$ termos, segundo o *modelo básico*, da qual se quer calcular o montante.

*Exemplo:* um banco empresta Cr$ 100.000,00 a uma empresa, cobrando a taxa de juros de 12% a.a. Sabendo que o prazo de utilização é unitário, que não há carência, que os juros serão cobrados em base anual e que o método utilizado pelo banco é o sistema americano com um prazo total de 4 anos, pede-se:

a) Construir a planilha do empréstimo.

b) Admitindo-se uma taxa de aplicação de 10% a.a., construir a planilha do fundo de amortização.

*Resolução:*

a) *Planilha pelo sistema americano*

| *Anos* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | – | – | – |
| 1 | 100.000,00 | – | 12.000,00 | 12.000,00 |
| 2 | 100.000,00 | – | 12.000,00 | 12.000,00 |
| 3 | 100.000,00 | – | 12.000,00 | 12.000,00 |
| 4 | – | 100.000,00 | 12.000,00 | 112.000,00 |
| Total | – | 100.000,00 | 48.000,00 | 148.000,00 |

b) *Planilha do fundo de amortização*

Sendo:

$P = 100.000,00$

$i_a = 10\%$ a.a.

$n = 4$ anos

Tem-se:

$$s_{\overline{4}|10} = 4,641$$

Portanto, o depósito anual deve ser:

$$R = \frac{P}{s_{\overline{4}|10}}$$

$$R = \frac{100.000,00}{4,641} \cong 21.547,08$$

Logo, a planilha do fundo de amortização é construída do seguinte modo:

I) É feito um depósito anual constante $R_k$.

II) Após decorrido o primeiro ano, o depósito passa a render juros. Depois do segundo período os juros credores são calculados sobre o saldo credor correspondente ao período anterior:

$$J_k = i_a \cdot Sc_{k-1}$$

onde se indicou por $Sc$ o saldo credor.

III) O saldo credor de cada período ($Sc_k$) é obtido somando-se o depósito feito ($R_k$) com os juros do período e com o saldo credor do período anterior ($Sc_{k-1}$):

$$Sc_k = R_k + J_k + Sc_{k-1}$$

$$Sc_k = R_k + i_a Sc_{k-1} + Sc_{k-1}$$

Ou seja:

$$Sc_k = R_k + Sc_{k-1}(1 + i_a)$$

Nestas condições, veja a planilha apresentada no alto da página seguinte.

A conferência é feita somando-se o total de depósitos com o total de juros e verificando-se se é igual aos Cr$ 100.000,00 obtidos no final do 4º ano.

**Nota:** O leitor deve observar que quando se calculou o depósito ($R_k$) estava-se encontrando um valor que, *capitalizado*, será igual ao principal. Daí a necessidade do cálculo de juros sobre o saldo credor.



| *Anos* ($k$) | *Saldo Credor* ($Sc_k$) | *Depósito* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) |
|---|---|---|---|
| 0 | – | – | – |
| 1 | 21.547,08 | 21.547,08 | – |
| 2 | 45.248,87 | 21.547,08 | 2.154,71 |
| 3 | 71.320,84 | 21.547,08 | 4.524,89 |
| 4 | 100.000,00 | 21.547,08 | 7.132,08 |
| Total | – | 86.188,32 | 13.811,68 |

## 2.4. Sistema de amortizações variáveis

Neste caso, a devolução do principal (amortizações) é feita em parcelas desiguais. Isto pode ocorrer na prática quando as partes fixam, antecipadamente, as parcelas de amortizações (sem nenhum critério particular) e a taxa de juros cobrada.

Nestas condições os juros serão calculados também sobre o saldo devedor.

*Exemplo:* uma empresa pede emprestado Cr$ 100.000,00, que serão amortizados anualmente do seguinte modo:

- 1º ano: 10.000,00
- 2º ano: 20.000,00
- 3º ano: 30.000,00
- 4º ano: 40.000,00

Sabendo-se que o banco concedeu 3 anos de carência para o início das amortizações, que a taxa de juros é de 10% a.a. e que os juros devidos serão pagos anualmente, construir a planilha.

*Resolução:*

A planilha é construída colocando-se inicialmente as amortizações. A seguir, são calculados os juros sobre o saldo devedor do período anterior e calculada a prestação:

| *Anos* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($R_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | – | – | – |
| 1 | 100.000,00 | – | 10.000,00 | 10.000,00 |
| 2 | 100.000,00 | – | 10.000,00 | 10.000,00 |
| 3 | 90.000,00 | 10.000,00 | 10.000,00 | 20.000,00 |
| 4 | 70.000,00 | 20.000,00 | 9.000,00 | 29.000,00 |
| 5 | 40.000,00 | 30.000,00 | 7.000,00 | 37.000,00 |
| 6 | – | 40.000,00 | 4.000,00 | 44.000,00 |
| Total | – | 100.000,00 | 50.000,00 | 150.000,00 |

**Nota:** Deixamos de analisar o chamado sistema alemão (ou de juros antecipados) por ter utilidade prática reduzida. O leitor pode encontrar tal método na bibliografia citada.

## 3. CUSTO EFETIVO DE UM EMPRÉSTIMO

É comum, nos empréstimos feitos na prática, que as instituições financeiras cobrem o imposto sobre operações financeiras (IOF), aval, comissões etc. Além disto, operações de repasse de empréstimos externos podem envolver um custo adicional de imposto de renda para a remessa de juros para o exterior.

Estes encargos adicionais aumentam a taxa de juros real para o mutuário, tornando-se indispensável seu cálculo de modo que sejam possíveis as comparações das diversas alternativas. O cálculo da taxa de juros real é feito utilizando-se o conceito de *taxa de retorno.*

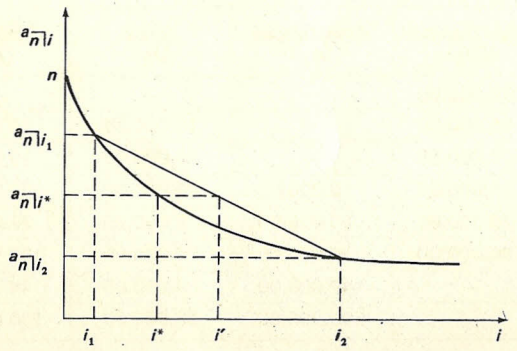
### 3.1. Taxa de retorno

*Taxa de retorno* é a taxa de juros que iguala, em uma data focal qualquer, os valores atuais e/ou montantes da importância emprestada com os valores das prestações pagas. Em outras palavras, a taxa de retorno é aquela que torna nulo o valor atual da diferença entre aplicações e recebimentos.

#### 3.1.1. Cálculo da taxa de retorno quando os valores são uniformes

Quando os valores de recebimento são uniformes, a taxa de retorno pode ser determinada diretamente através de uma tabela de $a_{\overline{n}|i}$ ou por interpolação.

Graficamente a situação é a seguinte:






Ou seja, determinamos através da série dada o valor de $a_{\overline{n}|i^*}$. Se este valor for tabelado, a taxa é obtida diretamente. Caso contrário, procuramos os valores de $a_{\overline{n}|i_1}$ e $a_{\overline{n}|i_2}$ que superestimam e subestimam o valor calculado.* Por interpolação linear obtém-se a taxa de juros $i'$. Esta taxa é superior à taxa de juros $i^*$ (verdadeira) e o erro cometido pode ser controlado através do intervalo $(i_2 - i_1)$. À medida que este intervalo é estreitado, o erro cometido é menor.

*Exemplo:* Um banco faz um empréstimo pessoal de Cr$ 1.000,00, que deve ser devolvido em 5 prestações mensais iguais de Cr$ 221,48. Sabendo-se que o banco cobra uma taxa de IOF de 0,2% a.m. sobre as prestações, antecipadamente, calcular a taxa de juros real de empréstimo.

*Resolução:*

Se o banco cobra 0,2% a.m. antecipadamente e sobre as prestações, em 5 meses teremos um IOF de 1%. Portanto, a quantia líquida recebida no ato é de:

$$P = 1.000,00 - 221,48 \times 5 \times 0,01$$

$$P = 1.000,00 - 11,07 = 988,93$$

Sendo:

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i^*}$$

temos:

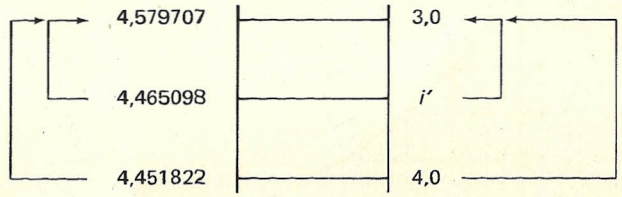
$$a_{\overline{5}|i^*} = \frac{988,93}{221,48} \cong 4,465098$$

Calculando ou procurando em uma tabela, obtemos:

$$a_{\overline{5}|3} \cong 4,579707$$

$$a_{\overline{5}|4} \cong 4,451822$$

Fazendo a interpolação linear:




(*) Veja o Exercício IV, no item 3.2 do Capítulo 7.

$$\frac{i' - 3,0}{4,0 - 3,0} = \frac{4,465098 - 4,579707}{4,451822 - 4,579707}$$

$$\frac{i' - 3,0}{1,0} = \frac{-0,114609}{-0,127885}$$

$$i' \cong 3,0 + 0,8962$$

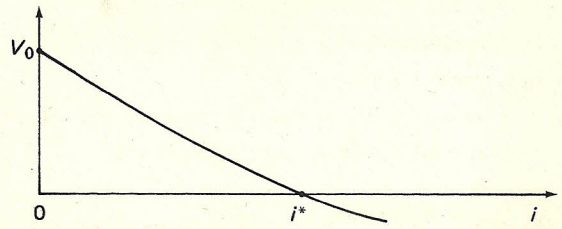
$$i' \cong 3,8962\% \text{ a.m.} \cong 3,90\% \text{ a.m.}$$

**Nota:** Fazendo-se iterações sucessivas, obtém-se $i^* \cong 3,8941\%$ a.m.

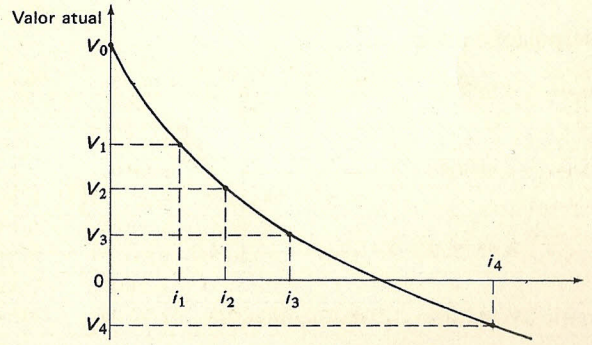
### 3.1.2. Cálculo da taxa de retorno quando os valores não são uniformes

Neste caso, a taxa de retorno só pode ser obtida por um processo de tentativa e erro.

Caso se esteja trabalhando com o *fluxo de caixa*, ou seja, com a diferença entre *aplicações* e *recebimentos*, a taxa de retorno será a taxa que torna nulo o valor atual do fluxo na data zero, ou seja, que torna nulo o valor atual do fluxo de caixa descontado:

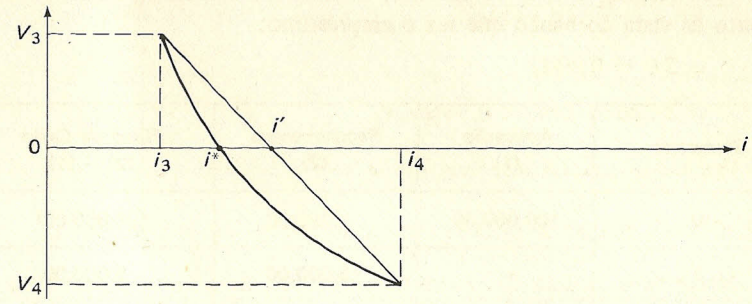



Para achar a taxa de juros realmente cobrada ($i^*$), devemos calcular o valor atual do fluxo de caixa a taxas de juros crescentes até que ele se torna negativo:






A seguir, faz-se uma interpolação linear entre $i_3$ e $i_4$ e determina-se a taxa de retorno aproximada ($i'$):




Com isto estamos cometendo um erro, pois a verdadeira taxa de retorno é $i^*$. Este erro pode ser diminuído fazendo-se iterações sucessivas.

*Exemplo:* uma empresa obtém um empréstimo de Cr$ 100.000,00, nas seguintes condições:

- taxa de juros: 10% ao ano ou 5% ao semestre;
- prazo de utilização unitário;
- prazo de carência: 2 semestres;
- IOF: 1% sobre o total de amortizações e encargos, cobrado no ato;
- aval: 2% sobre o saldo devedor ao fim de cada ano;
- sistema de amortização constante, em parcelas semestrais.

Pede-se para construir a planilha e calcular a taxa de juros real do empréstimo.

*Resolução:*

Nas condições enunciadas a prestação deve levar em conta a despesa de IOF mais a de aval.

| *Semestres* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *IOF* (1) | *Aval* (2) | *Amortizações* (3) ($A_k$) | *Juros* (4) ($J_k$) | *Prestações* (1) + (2) + (3) + (4) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | 1.195,00 | – | – | – | 1.195,00 |
| 1 | 100.000,00 | – | – | – | 5.000,00 | 5.000,00 |
| 2 | 75.000,00 | – | 1.500,00 | 25.000,00 | 5.000,00 | 31.500,00 |
| 3 | 50.000,00 | – | – | 25.000,00 | 3.750,00 | 28.750,00 |
| 4 | 25.000,00 | – | 500,00 | 25.000,00 | 2.500,00 | 28.000,00 |
| 5 | – | – | – | 25.000,00 | 1.250,00 | 26.250,00 |
| Total | – | 1.195,00 | 2.000,00 | 100.000,00 | 17.500,00 | 120.695,00 |

O valor do IOF foi obtido calculando-se 1% sobre o total de aval, amortização e juros.

Para calcular a taxa de retorno, consideremos o fluxo de caixa sobre o ponto de vista do banco que fez o empréstimo:

| *Semestres* | *Aplicação* (1) | *Recebimentos* (2) | *Fluxo de Caixa* (2) − (1) |
|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | 1.195,00 | (98.805,00) |
| 1 | – | 5.000,00 | 5.000,00 |
| 2 | – | 31.500,00 | 31.500,00 |
| 3 | – | 28.750,00 | 28.750,00 |
| 4 | – | 28.000,00 | 28.000,00 |
| 5 | – | 26.250,00 | 26.250,00 |

**Obs.:** Os parênteses, no fluxo de caixa, indicam valores negativos ou desembolsos.

Para calcular a taxa de retorno devemos determinar a taxa $i^*$, tal que:

$$V(i^*) = \frac{(98.805)}{(1+i^*)^0} + \frac{5.000}{(1+i^*)^1} + \frac{31.500}{(1+i^*)^2} + \frac{28.750}{(1+i^*)^3} + \frac{28.000}{(1+i^*)^4} + \frac{26.250}{(1+i^*)^5} = 0$$

Onde $V(i^*)$ é o valor atual do fluxo à taxa $i^*$.

Vamos determinar $i^*$ por tentativa e erro:

a) *1ª iteração:* começamos com a taxa de 5% ao semestre, pois esta é a taxa de juros cobrada:

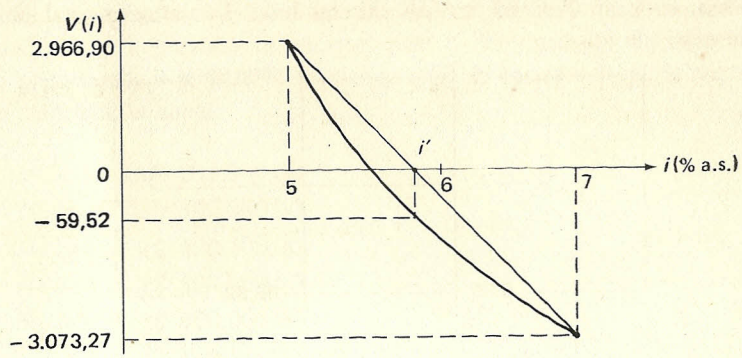
$i_1 = 5\%$ a.s. $\Longrightarrow V(i_1) \cong 2.966,90$

Como o valor ainda é positivo, usamos uma taxa de juros um pouco maior (7% a.s.):

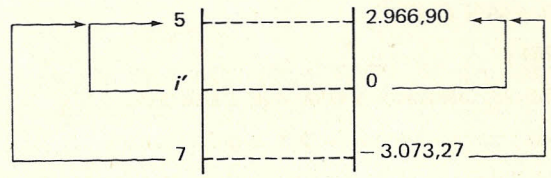
$i_2 = 7\%$ a.s. $\Longrightarrow V(i_2) = -3.073,27$

Graficamente, a situação é a seguinte:






Sendo $V(i_2) < 0$, podemos fazer a interpolação linear:




Ou seja:

$$\frac{i' - 5}{7 - 5} = \frac{0 - 2.966,90}{-3.073,27 - 2.966,90}$$

$i' = 5 + 2 \times 0,4912$

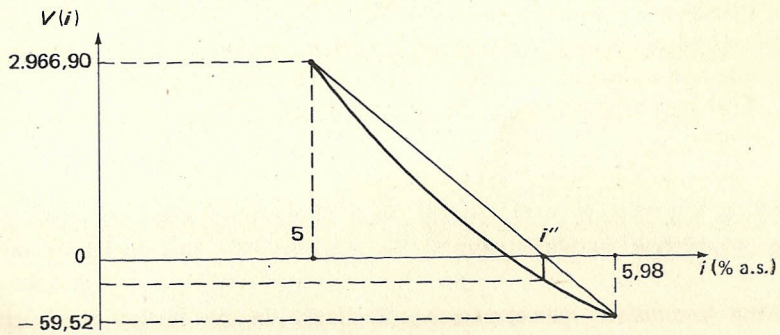
$i' \cong 5,98\%$ a.s.

Calculando-se o valor atual do fluxo com esta taxa, obtemos:

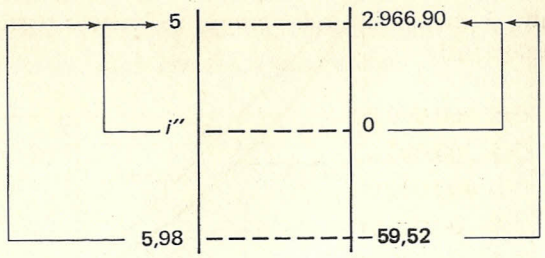
$i' = 5,98\%$ a.s. $\Longrightarrow V(i') = -59,52$

Ou seja, o valor atual ainda não é nulo.

b) *2ª iteração:* partindo do resultado anterior, fazemos a segunda iteração:



Ou seja:




$$\frac{i'' - 5}{5{,}98 - 5} = \frac{0 - 2.966{,}90}{-59{,}52 - 2.966{,}90}$$

$$i'' = 5 + 0{,}98 \times 0{,}9803$$

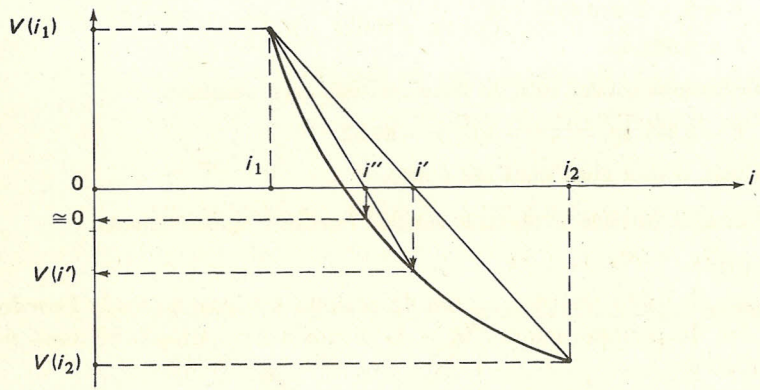
$$i'' \cong 5{,}961$$

Como verificação, calculamos o valor atual a esta taxa:

$$i'' = 5{,}961 \Longrightarrow V(i'') = -2{,}1 \cong 0$$

Portanto, concluímos que o custo do empréstimo é de 5,96% a.s.

Graficamente, o processo de iteração seguido foi:




## 4. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Uma imobiliária, planejando a construção de um núcleo residencial,



toma emprestado Cr$ 2.000.000,00 de um banco à taxa de 15% a.a. Tendo feito a previsão de receitas para a determinação da capacidade de pagamento, o gerente financeiro propõe ao banco o seguinte esquema de amortização anual:

1º ano: Cr$ 200.000,00
2º ano: Cr$ 300.000,00
3º ano: Cr$ 400.000,00
4º ano: Cr$ 500.000,00
5º ano: Cr$ 600.000,00

Nas condições acima expostas, qual é o desembolso que a imobiliária deverá fazer anualmente?

*Resolução:*

O meio mais simples de visualização e análise de um financiamento é obtido por sua planilha.

Neste caso, tem-se:

Principal: Cr$ 2.000.000,00

Juros: 15% a.a.

Amortizações: variáveis

Como dados básicos contidos na planilha, teremos:

$Sd_k$ = saldo devedor no fim do período $k$.

$A_k$ = amortização do período $k$.

$J_k$ = juros do período $k$.

Para a determinação das variáveis acima, considere-se que:

$$Sd_k = Sd_{k-1} - A_k$$

ou seja, o Saldo Devedor no fim do período $k$ é igual ao Saldo Devedor no fim do período anterior $(k - 1)$ menos a Amortização efetuada no período $k$.

$$J_k = iSd_{k-1}$$

ou seja, os Juros do período $k$ são iguais à taxa de juros por período (na forma unitária) multiplicada pelo Saldo Devedor no fim do período anterior.

$A_k$ – depende do contrato de financiamento.

PLANILHA DE FINANCIAMENTO

| *Ano* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2.000.000 | 2.000.000 | – | – | – |
| 1 | – | 1.800.000 | 200.000 | 300.000 | 500.000 |
| 2 | – | 1.500.000 | 300.000 | 270.000 | 570.000 |
| 3 | – | 1.100.000 | 400.000 | 225.000 | 625.000 |
| 4 | – | 600.000 | 500.000 | 165.000 | 665.000 |
| 5 | – | – | 600.000 | 90.000 | 690.000 |
| Total | – | – | 2.000.000 | 1.050.000 | 3.050.000 |

O desembolso anual que a imobiliária terá de fazer é igual à prestação, ou seja, à soma de amortização mais juros. Portanto, na coluna "Prestação" encontramos o valor dos desembolsos anuais.

Apenas para exemplificar como foi elaborada a planilha acima, verificar os cálculos a seguir:

$$J_k = i \cdot Sd_{k-1}$$

então

$$J_1 = 0{,}15\ Sd_0$$

$$J_1 = 0{,}15\ (2.000.000) = \text{Cr\$ } 300.000{,}00$$

e

$$Sd_k = Sd_{k-1} - A_k$$

portanto

$$Sd_1 = Sd_0 - A_1$$

$$Sd_1 = 2.000.000 - 200.000 = \text{Cr\$ } 1.800.000{,}00$$

2. Para um projeto de expansão, a empresa "Pesqueiros Ltda." obtém um financiamento de Cr$ 5.000.000,00, nas seguintes condições:

a) Taxa de Juros: 8% a.a. – com pagamentos semestrais.

b) Amortizações: SAC – Sistema de Amortizações Constantes, com pagamentos semestrais.

c) Prazo de Amortização: 5 anos.

Construir a planilha de financiamento.

*Resolução:*

A diferença entre este problema e o anterior deve-se ao fato de que:



1) a taxa de juros é referida em termos anuais e os juros são semestrais; e 2) o sistema de amortizações é o SAC.

*Taxa de Juros:* Como a taxa anual é *nominal*, devemos calcular a taxa semestral proporcional.

$$i = 8\%\ \text{a.a.} \Longrightarrow i_s = 4\%\ \text{a.s.}$$

**Nota:** É evidente que a taxa efetiva anual é maior que 8% a.a. (taxa efetiva = = 8,16% a.a.).

*Amortizações:* Sendo adotado o Sistema de Amortizações Constantes (SAC), tem-se que todas as amortizações serão de mesmo valor.

Prazo de Amortização: 5 anos ou 10 semestres

A amortização semestral ($A_k$) será dada por:

$$A_k = \frac{5.000.000}{10} = \text{Cr\$ } 500.000{,}00$$

PLANILHA DE FINANCIAMENTO

| *Semestres* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5.000.000 | 5.000.000 | – | – | – |
| 1 | – | 4.500.000 | 500.000 | 200.000 | 700.000 |
| 2 | – | 4.000.000 | 500.000 | 180.000 | 680.000 |
| 3 | – | 3.500.000 | 500.000 | 160.000 | 660.000 |
| 4 | – | 3.000.000 | 500.000 | 140.000 | 640.000 |
| 5 | – | 2.500.000 | 500.000 | 120.000 | 620.000 |
| 6 | – | 2.000.000 | 500.000 | 100.000 | 600.000 |
| 7 | – | 1.500.000 | 500.000 | 80.000 | 580.000 |
| 8 | – | 1.000.000 | 500.000 | 60.000 | 560.000 |
| 9 | – | 500.000 | 500.000 | 40.000 | 540.000 |
| 10 | – | – | 500.000 | 20.000 | 520.000 |
| Total | – | – | 5.000.000 | 1.100.000 | 6.100.000 |

**Observações:** a planilha acima nos oferece o quadro do financiamento em qualquer instante de tempo. Assim, se quisermos saber qual é o saldo devedor, os juros e a prestação referentes ao período 8, basta verificarmos o quadro:

$Sd_8 = 1.000.000$

$J_8 = 60.000$

Prestação = 560.000

3. Um empréstimo de Cr$ 100.000,00 será saldado em 25 amortizações quadrimestrais pelo sistema SAC, tendo sido contratada a taxa de juros de 5% ao quadrimestre. Qual é o saldo devedor, os juros e a prestação. referentes ao 16º quadrimestre?

*Resolução:*

Como se trata do sistema SAC, para sabermos os valores do saldo devedor, dos juros ou da prestação em determinado período não é necessária a construção da planilha. Podemos calcular estes valores através de fórmulas simplificadoras.

Considerando as seguintes notações:

$Sd_0$ = valor a ser amortizado em $n$ parcelas
$n$ = número de amortizações
$A$ = amortização constante
$i$ = taxa de juros por período
$J_k$ = juros referentes ao período $k$
$R_k$ = prestação referente ao período $k$

Temos:

a) *Amortização por período*

$$A = \frac{Sd_0}{n}$$

b) *Saldo devedor do período k ($Sd_k$)*

$$Sd_k = Sd_0 - kA$$

$$Sd_k = Sd_0 - k\left(\frac{Sd_0}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{Sd_k = Sd_0\left(1 - \frac{k}{n}\right)}$$

c) *Juros referentes ao período k ($J_k$)*

$$J_k = i\,Sd_{k-1}$$

Considerando que:

$$Sd_{k-1} = Sd_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$



Então

$$\boxed{J_k = Sd_0 i\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}$$

d) *Prestação referente ao período k ($R_k$)*

Como

$$R_k = A + J_k$$

Então

$$R_k = \frac{Sd_0}{n} + Sd_0 i\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{R_k = Sd_0\left[\frac{1}{n} + i\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right]}$$

Em nosso exemplo são pedidos o saldo devedor, os juros e a prestação referentes ao 16º quadrimestre. Portanto, considerando:

$Sd_0$ = 100.000
$i$ = 5% a.q.
$n$ = 25 quadrimestres
$k$ = 16 (visto ser o 16º quadrimestre)

Temos:

a) Saldo devedor do 16º quadrimestre ($Sd_{16}$):

$$Sd_k = Sd_0\left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

$$Sd_{16} = 100.000\left(1 - \frac{16}{25}\right)$$

$$Sd_{16} = 100.000\,(0{,}36)$$

$$Sd_{16} = \text{Cr\$ } 36.000{,}00$$

b) Juros referentes ao 16º quadrimestre ($J_{16}$):

$$J_k = Sd_0 i\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$J_{16} = 100.000\,(0{,}05)\left(1 - \frac{15}{25}\right)$$

$$J_{16} = 100.000\,(0{,}05)\,(0{,}40)$$

$$J_{16} = \text{Cr\$ } 2.000{,}00$$

c) Prestação referente ao 16º quadrimestre ($R_{16}$):

$$R_k = Sd_0\left[\frac{1}{n} + i\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right]$$

$$R_{16} = 100.000\left[\frac{1}{25} + 0{,}05\left(1 - \frac{15}{25}\right)\right]$$

$$R_{16} = 100.000\,(0{,}06)$$

$$R_{16} = \text{Cr\$ } 6.000{,}00$$

**Obs.:** naturalmente tais fórmulas são válidas somente quando

1º) o sistema de amortização é o SAC

2º) $Sd_0$ = saldo devedor inicial, representa o total do financiamento

3º) inexiste carência

4. Uma empresa obtém o financiamento de Cr$ 960.000,00, devendo este montante ser liberado em quatro parcelas trimestrais na seguinte ordem cronológica:

1ª parcela: Cr$ 200.000,00
2ª parcela: Cr$ 500.000,00
3ª parcela: Cr$ 160.000,00
4ª parcela: Cr$ 100.000,00

O banco financiador cobra 6% ao ano, com pagamento de juros trimestrais.
O prazo total do financiamento é de 4 anos com 15 meses de carência. As amortizações serão trimestrais pelo sistema SAC.

Construir a planilha do financiamento.

*Resolução:*

*Taxa de Juros:* $i = 6\%$ a.a. $\Longrightarrow$ $i_t = 0{,}015$ a.t.

*Prazo de Amortização:* 33 meses ou 12 amortizações

$$A_k = \frac{960.000}{12}$$

$$\therefore\ A_k = \text{Cr\$ } 80.000{,}00$$

*Carência:* 15 meses ou 5 trimestres.



| *Trimestres* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 200.000 | 200.000 | – | – | – |
| 1 | 500.000 | 700.000 | – | 3.000 | 3.000 |
| 2 | 160.000 | 860.000 | – | 10.500 | 10.500 |
| 3 | 100.000 | 960.000 | – | 12.900 | 12.900 |
| 4 | – | 960.000 | – | 14.400 | 14.400 |
| 5 | – | 880.000 | 80.000 | 14.400 | 94.400 |
| 6 | – | 800.000 | 80.000 | 13.200 | 93.200 |
| 7 | – | 720.000 | 80.000 | 12.000 | 92.000 |
| 8 | – | 640.000 | 80.000 | 10.800 | 90.800 |
| 9 | – | 560.000 | 80.000 | 9.600 | 89.600 |
| 10 | – | 480.000 | 80.000 | 8.400 | 88.400 |
| 11 | – | 400.000 | 80.000 | 7.200 | 87.200 |
| 12 | – | 320.000 | 80.000 | 6.000 | 86.000 |
| 13 | – | 240.000 | 80.000 | 4.800 | 84.800 |
| 14 | – | 160.000 | 80.000 | 3.600 | 83.600 |
| 15 | – | 80.000 | 80.000 | 2.400 | 82.400 |
| 16 | – | – | 80.000 | 1.200 | 81.200 |
| Total | – | – | 960.000 | 134.400 | 1.094.400 |

5. A taxa efetiva do Banco X é de 20% a.a. Neste banco, uma companhia retira um financiamento de Cr$ 400.000,00, comprometendo-se com o Banco X a amortizá-lo em 6 prestações quadrimestrais, vencendo a primeira 4 meses após fechamento do contrato e concomitante recebimento do valor financiado. Como foi adotado o Sistema Francês de amortizações, a empresa quer saber qual é a parcela de juros contida em cada prestação para que possa ser feita sua apropriação nas despesas do período. Calcular os juros por período.

*Resolução:*

*Taxa de Juros:* Como as prestações são quadrimestrais e a taxa anual é a efetiva, deve-se, portanto, calcular a taxa equivalente quadrimestral ($i_q$).

$$1 + i_q = \sqrt[3]{1{,}20}$$

$$1 + i_q = 1{,}062658$$

$$\therefore\ i_q = 0{,}062658 \quad \text{ou} \quad i_q \cong 6{,}27\%\ \text{a.q.}$$

*Prestação:*

Uma vez que é o Sistema Francês, teremos por conseguinte prestações iguais, ou seja:

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

conforme o modelo básico de anuidades.

$P = 400.000$

$i = 6,27\%$ a.q.

$n = 6$ prestações quadrimestrais

$R = ?$

$$400.000 = R \cdot a_{\overline{6}|6,27}$$

$$400.000 = R \cdot \frac{1 - (1,0627)^{-6}}{0,0627}$$

$$400.000 = R \cdot (4,875885)$$

$$R = \frac{400.000}{4,875885} = \text{Cr\$ } 82.036,39$$

Elaborando-se a planilha, conforme modelos já apresentados, tem-se que na coluna "Prestação" os valores serão todos iguais.

*Juros:* os juros, como são calculados sobre o saldo devedor do período anterior ($Sd_{k-1}$), serão, no período "$k$":

$$J_k = i \cdot Sd_{k-1}$$

Assim, os juros do primeiro quadrimestre serão:

$$J_1 = 0,0627\,(400.000) = \text{Cr\$ } 25.080,00$$

*Amortização:* A prestação do período "$k$" menos os juros do período "$k$" é igual à parcela amortizada neste período.

Portanto, a amortização do primeiro quadrimestre é:

$$A_k = R_k - J_k$$

$$A_k = 82.036,39 - 25.080,00 = \text{Cr\$ } 56.956,39$$

*Saldo Devedor:* O saldo devedor do período "$k$" é igual ao saldo devedor do período "$k - 1$" (período anterior) menos a amortização do período "$k$" ($A_k$).

$$Sd_k = Sd_{k-1} - A_k$$



O saldo devedor do primeiro quadrimestre será:

$$Sd_1 = \text{Cr\$ } 400.000,00 - 56.956,39 = \text{Cr\$ } 343.043,61$$

Esta sucessão de cálculo é feita iterativamente até o último período, onde teremos saldo devedor nulo.

PLANILHA DE FINANCIAMENTO

| *Quadrimestres* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 400.000,00 | 400.000,00 | – | – | – |
| 1 | – | 343.043,61 | 56.956,39 | 25.080,00 | 82.036,39 |
| 2 | – | 282.516,05 | 60.527,56 | 21.508,83 | 82.036,39 |
| 3 | – | 218.193,42 | 64.322,63 | 17.713,76 | 82.036,39 |
| 4 | – | 149.837,76 | 68.355,66 | 13.680,73 | 82.036,39 |
| 5 | – | 77.196,20 | 72.641,56 | 9.394,83 | 82.036,39 |
| 6 | – | – | 77.196,20 | 4.840,19 | 82.036,39 |
| Total | – | – | 400.000,00 | 92.218,34 | 492.218,34 |

O valor referente a juros, período por período, conforme o solicitado no enunciado do problema, encontra-se portanto devidamente calculado na planilha.

**Observações:** a determinação do saldo devedor em um período arbitrário pode ser feita por dois outros métodos além do apresentado:

a) *Análise Retrospectiva:* Consideram-se as prestações pagas e o valor financiado ou principal.

Se no fim de "$k$" períodos o mutuário não tivesse pago valor algum, o saldo devedor seria igual ao montante ($S_1$) do valor financiado ($P$), considerando-se a taxa de juros contratada ($i$). Portanto:

$$S_1 = P(1 + i)^k$$

Contudo, como o mutuário já pagou "$k$" prestações, o montante ($S_2$) destas prestações imediatamente após o pagamento da $k$-ésima prestação, considerando-se a taxa de juros contratada ($i$), será dado por:

$$S_2 = R \cdot S_{\overline{k}|i}$$

Por conseguinte, o saldo devedor no fim do período $k$ ($Sd_k$) será:

$$Sd_k = S_1 - S_2$$

Substituindo, teremos:

$$Sd_k = P(1 + i)^k - R \cdot S_{\overline{k}|i}$$

onde:

$Sd_k$ = saldo devedor do período "$k$", ou seja, imediatamente após o pagamento da prestação "$k$"

$P$ = valor financiado ou principal

$i$ = taxa de juros efetiva

$k$ = número de prestações pagas

$R$ = valor da prestação

$S_{\overline{k}|i}$ = fator de montante, para "$k$" termos, considerando-se a taxa de juros "$i$", conforme modelo básico de anuidades (ver Capítulo VII).

Por exemplo, supondo-se que no problema apresentado queiramos saber o saldo devedor após o pagamento da 4ª prestação, ou seja, $Sd_4$, teríamos:

$$Sd_k = P(1 + i)^k - R \cdot S_{\overline{k}|i}$$

onde:

$P = 400.000$

$i = 6{,}27\%$ a.q.

$R = 82.036{,}39$

$k = 4$

portanto,

$$Sd_4 = 400.000\,(1{,}0627)^4 - 82.036{,}39\,S_{\overline{4}|6{,}27}$$

$$Sd_4 = 400.000\,(1{,}275389) - 82.036{,}39\left[\frac{(1{,}0627)^4 - 1}{0{,}0627}\right]$$

$$Sd_4 = 510.155{,}60 - 82.036{,}39\,(4{,}392172)$$

$$Sd_4 = 510.155{,}60 - 360.317{,}90$$

$$Sd_4 = \text{Cr\$ } 149.837{,}70$$

A diferença deve-se a arredondamentos nos cálculos.



b) *Análise Prospectiva:* Consideram-se as prestações a serem pagas, sendo o saldo devedor o valor atual destas prestações, à taxa de juros efetiva.

Quando calculamos o valor atual das prestações vincendas, eliminamos a parcela de juros nelas contida, sendo o valor atual igual à parcela do principal a amortizar, ou seja, o saldo devedor. Portanto, se

$Sd_k$ = saldo devedor do período "$k$", ou seja, imediatamente após o pagamento da prestação "$k$"

$R$ = valor da prestação

$i$ = taxa de juros efetiva

$n$ = número total de prestações

$k$ = número de prestações pagas

$m$ = $n - k$ (número de prestações a pagar)

$a_{\overline{m}|i}$ = fator de valor atual, para "$m$" termos, considerando-se a taxa de juros "$i$", conforme modelo básico de anuidades (ver Capítulo VII).

então:

$$Sd_k = R \cdot a_{\overline{m}|i}$$

No exemplo apresentado, o saldo devedor do período 4 será:

$R = 82.036{,}39$

$i = 6{,}27\%$ a.q.

$m = 2$ (pois $n = 6$ e $k = 4$, sendo $m = n - k$)

$$Sd_k = R \cdot a_{\overline{m}|i}$$

$$Sd_4 = 82.036{,}39\,a_{\overline{2}|6{,}27}$$

$$Sd_4 = 82.036{,}39\left[\frac{1 - (1{,}0627)^{-2}}{0{,}0627}\right]$$

$$Sd_4 = 82.036{,}39\,(1{,}826479)$$

$$Sd_4 = \text{Cr\$ } 149.837{,}74$$

A diferença deve-se a arredondamentos nos cálculos.

6. O financiamento de um equipamento no valor de Cr$ 10.000.000,00 é feito pelo Sistema Francês (Tabela Price) em 20 trimestres, com 5 trimestres de carência, ou seja, a primeira amortização ocorrerá ao fim do

5º trimestre. A operação foi contratada à taxa de 20% a.a., sendo os juros capitalizados durante a carência. Qual é o saldo devedor no 16º trimestre?

*Resolução:*

*Taxa de Juros:* Sendo os juros Tabela Price, isto implica que a taxa de juros efetiva por período, no caso trimestres, seja a taxa proporcional e não a equivalente.

Portanto:

$$20\%\ \text{a.a.} \Longrightarrow 5\%\ \text{a.t.}$$

Prestação:

$$R = \frac{P_4}{a_{\overline{n}|i}}$$

$P_4$ = montante do principal ao fim do 4º trimestre, pois os juros são capitalizados durante a carência. A capitalização é feita apenas até o 4º período, porque a primeira amortização ocorre no 5º período. Caso fizéssemos a capitalização até o 5º período (final da carência) deveríamos considerar prestações antecipadas, chegando-se portanto ao mesmo resultado para o valor das prestações.

$n$ = 16 prestações trimestrais

$i$ = 5% a.t.

$$P_4 = P_0(1 + i)^4$$

$$P_0 = 10.000.000$$

$$P_4 = 10.000.000\,(1{,}05)^4$$

$$\therefore\ P_4 = \text{Cr\$ } 12.155.062{,}50$$

então

$$R = \frac{12.155.062{,}50}{a_{16|5}}$$

$$R = \frac{12.155.062{,}50}{10{,}837770}$$

$$R = \text{Cr\$ } 1.121.546{,}45$$

Construindo a planilha, com refinanciamento dos juros na carência, teremos:



PLANILHA DE FINANCIAMENTO

| Trimestres ($k$) | Saque | Saldo Devedor ($Sd_k$) | Amortização ($A_k$) | Juros ($J_k$) | Prestação ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10.000.000,00 | 10.000.000,00 | – | – | – |
| 1 | – | 10.500.000,00 | – | – | – |
| 2 | – | 11.025.000,00 | – | – | – |
| 3 | – | 11.576.250,00 | – | – | – |
| 4 | – | 12.155.062,50 | – | – | – |
| 5 | – | 11.641.269,17 | 513.793,33 | 607.753,12 | 1.121.546,45 |
| 6 | – | 11.101.786,18 | 539.482,99 | 582.063,46 | 1.121.546,45 |
| 7 | – | 10.535.329,04 | 566.457,14 | 555.089,31 | 1.121.546,45 |
| 8 | – | 9.940.549,04 | 594.780,00 | 526.766,45 | 1.121.546,45 |
| 9 | – | 9.316.030,04 | 624.519,00 | 497.027,45 | 1.121.546,45 |
| 10 | – | 8.660.285,09 | 655.744,95 | 465.801,50 | 1.121.546,45 |
| 11 | – | 7.971.752,89 | 688.532,20 | 433.014,25 | 1.121.546,45 |
| 12 | – | 7.248.794,08 | 722.958,81 | 398.587,64 | 1.121.546,45 |
| 13 | – | 6.489.687,33 | 759.106,75 | 362.439,70 | 1.121.546,45 |
| 14 | – | 5.692.625,25 | 797.062,08 | 324.484,37 | 1.121.546,45 |
| 15 | – | 4.855.710,06 | 836.915,19 | 284.631,26 | 1.121.546,45 |
| 16 | – | 3.976.949,11 | 878.760,95 | 242.785,50 | 1.121.546,45 |
| 17 | – | 3.054.250,12 | 922.698,99 | 198.847,46 | 1.121.546,45 |
| 18 | – | 2.085.416,18 | 968.833,94 | 152.712,51 | 1.121.546,45 |
| 19 | – | 1.068.140,54 | 1.017.275,64 | 104.270,81 | 1.121.546,45 |
| 20 | – | – | 1.068.140,54 | 53.405,91 | 1.121.546,45 |
| Total | – | – | 12.155.062,50 | 5.789.680,70 | 17.944.743,20 |

Na planilha temos todos os valores referentes ao financiamento da contratação até sua liquidação. O saldo devedor do 16º trimestre é igual a Cr$ 3.976.949,11, conforme pode ser verificado na planilha.

Caso desejássemos saber apenas o saldo devedor do 16º trimestre, poderíamos empregar um dos métodos já expostos:

*Análise Prospectiva:*

$Sd_k = Ra_{\overline{m}|i}$

$R = 1.121.546,45$

$i = 5\%$ a.t.

$m = 4$ (pois $m = n - k$, onde $n = 20$ e $k = 16$)

$Sd_{16} = 1.121.546,45\ a_{\overline{4}|5}$

$Sd_{16} = 1.121.546,45\ (3,545951)$

$Sd_{16} = Cr\$\ 3.976.948,76$

A diferença com o valor encontrado na planilha deve-se a aproximações nos cálculos.

*Sugestão:* Calcular o saldo devedor pela análise retrospectiva.

7. Um banco empresta a uma empresa Cr$ 15.000.000,00 pelo prazo de 4 anos, à taxa de 8% a.a. Sabendo-se que será adotado o Sistema Americano de amortização, qual será o desembolso anual?

*Resolução:*

No Sistema Americano, o principal é devolvido apenas no último período do prazo de financiamento, sendo ou não os juros capitalizados. No presente problema, tem-se:

PLANILHA DE FINANCIAMENTO

| *Ano* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 15.000.000 | 15.000.000 | – | – | – |
| 1 | – | 15.000.000 | – | 1.200.000 | 1.200.000 |
| 2 | – | 15.000.000 | – | 1.200.000 | 1.200.000 |
| 3 | – | 15.000.000 | – | 1.200.000 | 1.200.000 |
| 4 | – | – | 15.000.000 | 1.200.000 | 16.200.000 |
| Total | – | – | 15.000.000 | 4.800.000 | 19.800.000 |



8. O Banco Omega S.A. empresta a um grande cliente Cr$ 300.000,00, à taxa efetiva de 30% a.a., pelo prazo de 3 anos. O banco opera com o Sistema Americano de amortização, exigindo o pagamento dos juros semestralmente. O cliente, prevendo o alto desembolso ao fim do prazo de financiamento, resolve constituir um fundo para a amortização (Sinking Fund), efetuando depósitos semestrais iguais em uma instituição que paga 25% a.a. (taxa efetiva) sobre o saldo credor.

Qual é o desembolso total efetuado pelo cliente?

*Resolução:*

Este é um problema típico de emprego do Sistema Americano, aliado ao "Sinking Fund".

Resolvendo por etapas, teremos:

a) *Amortização pelo Sistema Americano:*

*Taxa de Juros:* Como a taxa efetiva é de 30% a.a., a taxa semestral ($i_s$) será:

$1 + i_s = \sqrt{1,30}$

$1 + i_s = 1,140175$

$\therefore\ i_s = 0,140175$ ou $i_s \cong 14,02\%$ a.s.

$n = 3$ anos ou 6 semestres

PLANILHA DE FINANCIAMENTO

| *Semestres* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 300.000 | 300.000 | – | – | – |
| 1 | – | 300.000 | – | 42.060 | 42.060 |
| 2 | – | 300.000 | – | 42.060 | 42.060 |
| 3 | – | 300.000 | – | 42.060 | 42.060 |
| 4 | – | 300.000 | – | 42.060 | 42.060 |
| 5 | – | 300.000 | – | 42.060 | 42.060 |
| 6 | – | 300.000 | 300.000 | 42.060 | 342.060 |
| Total | – | – | 300.000 | 252.360 | 552.060 |

Caso não existisse a constituição do fundo de amortização, o desembolso total seria de Cr$ 552.360,00, conforme dados da planilha do Sistema Americano. Entretanto, pelo "Sinking Fund", o desembolso do cliente para pagamento da amortização não será de Cr$ 300.000,00, visto que os depósitos para liquidação do capital emprestado também serão remunerados (25% a.a.).

O desembolso total, portanto, constituir-se-á na soma dos juros pagos mais os depósitos iguais efetuados no fundo de amortização (Sinking Fund).

b) *Fundo de Amortização (Sinking Fund):*

*Taxa de Juros:* Sendo os depósitos semestrais, teremos:

$$1 + i_s = \sqrt{1{,}25}$$

$$1 + i_s = 1{,}118034$$

$$\therefore\ i_s = 0{,}118034 \quad \text{ou} \quad i_s \cong 11{,}80\%\ \text{a.s.}$$

$$n = 3\ \text{anos ou}\ 6\ \text{semestres}$$

O valor da amortização ao fim do 6º semestre será de Cr$ 300.000,00; portanto:

$$S = Rs_{\overline{n}|i}$$

$$S = 300.000$$

$$i = 11{,}8\%\ \text{a.s.}$$

$$n = 6\ \text{semestres}$$

$$300.000 = R \cdot s_{\overline{6}|11{,}8}$$

$$300.000 = R\left[\frac{(1{,}118)^6 - 1}{0{,}118}\right]$$

$$300.000 = R\,(8{,}074311)$$

$$R = \frac{300.000}{8{,}074311}$$

$$R = \text{Cr\$}\ 37.154{,}87$$

Por conseguinte, serão efetuados 6 depósitos semestrais de Cr$ 37.154,87, sobre os quais acrescentar-se-ão juros de 11,8% a.s.

A evolução do fundo de amortização apresentará um quadro conforme descrito a seguir.



Entretanto, convém lembrar que:

$$J_k = i_a \cdot Sc_{k-1}$$

e

$$Sc_k = R + Sc_{k-1} + J_k$$

onde

$i_a$ = taxa de aplicação por período

$R$ = depósito periódico

$J_k$ = juros creditados no período "$k$"

$Sc_k$ = saldo credor do período "$k$"

Neste problema, consideraremos:

$$R = 37.154{,}87$$

$$i_a = 11{,}8\%\ \text{a.s.}$$

PLANILHA DO FUNDO DE AMORTIZAÇÃO

| *Semestres* ($k$) | *Saldo Credor* ($Sc_k$) | *Depósito* ($R$) | *Juros* ($J_k$) |
|---|---|---|---|
| 0 | – | – | – |
| 1 | 37.154,87 | 37.154,87 | – |
| 2 | 78.694,01 | 37.154,87 | 4.384,27 |
| 3 | 125.134,77 | 37.154,87 | 9.285,89 |
| 4 | 177.055,54 | 37.154,87 | 14.765,90 |
| 5 | 235.102,96 | 37.154,87 | 20.892,55 |
| 6 | 300.000,00 | 37.154,87 | 27.742,17 |
| Total | – | 222.929,22 | 77.070,78 |

Portanto, o desembolso total para pagamento do empréstimo será:

$$222.929,22 + 252.360,00 = \text{Cr\$ } 475.289,22$$

O desembolso por período é igual aos juros pagos mais o depósito efetuado no fundo de amortização. Ou seja:

$$42.060,00 + 37.154,87 = \text{Cr\$ } 79.214,87$$

9. Uma empresa em fase de expansão obtém de uma agência governamental o financiamento de Cr$ 48.000.000,00 a ser liberado em 3 parcelas quadrimestrais seqüenciais, sendo de Cr$ 13.000.000,00 a primeira, de Cr$ 30.000.000,00 a segunda e de Cr$ 5.000.000,00 a terceira.

Os encargos financeiros são basicamente os seguintes:

a) Taxa efetiva de juros: 9% a.a.

b) Comissão de abertura de crédito igual a 0,5% sobre o valor total do financiamento. Este valor será cobrado quando da liberação da primeira parcela.

c) Imposto sobre Operações Financeiras (IOF) de 1% sobre o total geral, ou seja, valor do financiamento mais encargos financeiros.

O órgão financiador concede 4 quadrimestres de carência, sendo os juros pagos durante a carência. O prazo total do financiamento será de 5 anos e o sistema de amortização adotado é o SAC. As amortizações serão quadrimestrais.

Calcular o custo efetivo anual do empréstimo.

*Resolução:*

O custo efetivo do empréstimo é a taxa de retorno do fluxo de caixa gerado pelos recebimentos e pelos pagamentos. No caso, a taxa de retorno da planilha será o custo efetivo quadrimestral.

*Taxa de Juros:* Calculando-se a taxa equivalente quadrimestral ($i_q$), vem:

$$1 + i_q = \sqrt[3]{1,09}$$

$$1 + i_q = 1,029142$$

$$\therefore \; i_q = 0,029141 \quad \text{ou} \quad i_q \cong 2,91 \text{ a.q.}$$

*Prazo de Amortização:* 11 quadrimestres ou 12 amortizações.

$$A_k = \frac{48.000.000}{12}$$

$$A_k = \text{Cr\$ } 4.000.000,00$$

*Carência:* 4 quadrimestres.



PLANILHA DE FINANCIAMENTO

(Cr$ 1.000,00)

| *Quadrimestres (k)* | *Saque* | *Saldo Devedor* | *Amortização* (1) | *Juros* (2) | *Comissão Ab. Créd.* (3) | *IOF* (4) | *Prestação* (1) + (2) + + (3) + (4) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 13.000 | 13.000 | – | – | 240 | 603 | 843 |
| 1 | 30.000 | 43.000 | – | 378 | – | – | 378 |
| 2 | 5.000 | 48.000 | – | 1.251 | – | – | 1.251 |
| 3 | – | 48.000 | – | 1.397 | – | – | 1.397 |
| 4 | – | 44.000 | 4.000 | 1.397 | – | – | 5.397 |
| 5 | – | 40.000 | 4.000 | 1.280 | – | – | 5.280 |
| 6 | – | 36.000 | 4.000 | 1.164 | – | – | 5.164 |
| 7 | – | 32.000 | 4.000 | 1.048 | – | – | 5.048 |
| 8 | – | 28.000 | 4.000 | 931 | – | – | 4.931 |
| 9 | – | 24.000 | 4.000 | 815 | – | – | 4.815 |
| 10 | – | 20.000 | 4.000 | 698 | – | – | 4.698 |
| 11 | – | 16.000 | 4.000 | 582 | – | – | 4.582 |
| 12 | – | 12.000 | 4.000 | 466 | – | – | 4.466 |
| 13 | – | 8.000 | 4.000 | 349 | – | – | 4.349 |
| 14 | – | 4.000 | 4.000 | 233 | – | – | 4.233 |
| 15 | – | – | 4.000 | 116 | – | – | 4.116 |
| Total | – | – | 48.000 | 12.105 | 240 | 603 | 60.948 |

Os valores da planilha foram calculados conforme segue:

a) Amortização $= \dfrac{48.000}{12} = \text{Cr\$ } 4.000$ mil.

b) Juros = 2,91% sobre o saldo devedor do período anterior.

c) Comissão de abertura de crédito = 0,5% sobre o total financiado. Ou seja:

$$48.000(0,005) = \text{Cr\$ } 240 \text{ mil.}$$

d) Imposto sobre operações financeiras (IOF): 1% sobre o total das amortizações mais encargos financeiros. Portanto:

$$48.000 + 12.105 + 240 = \text{Cr\$ } 60.345 \text{ mil}$$

então

$$60.345(0,01) \cong \text{Cr\$ } 603 \text{ mil.}$$

Para calcular o custo efetivo do empréstimo, devemos calcular a taxa de retorno do fluxo de caixa sob o ponto de vista do banco que fez o empréstimo. Os saques serão considerados *aplicações* e as prestações *recebimentos*.

FLUXO DE CAIXA

(Cr$ 1.000,00)

| *Quadrimestres* | *Aplicações* (1) | *Recebimentos* (2) | *Fluxo de Caixa* (2) – (1) |
|---|---|---|---|
| 0 | 13.000 | 843 | (12.157) |
| 1 | 30.000 | 378 | (29.622) |
| 2 | 5.000 | 1.251 | (3.749) |
| 3 | – | 1.397 | 1.397 |
| 4 | – | 5.397 | 5.397 |
| 5 | – | 5.280 | 5.280 |
| 6 | – | 5.164 | 5.164 |
| 7 | – | 5.048 | 5.048 |
| 8 | – | 4.931 | 4.931 |
| 9 | – | 4.815 | 4.815 |
| 10 | – | 4.698 | 4.698 |
| 11 | – | 4.582 | 4.582 |
| 12 | – | 4.466 | 4.466 |
| 13 | – | 4.349 | 4.349 |
| 14 | – | 4.233 | 4.233 |
| 15 | – | 4.116 | 4.116 |

**Obs.:** Os valores do fluxo de caixa entre parênteses são negativos.

A taxa de retorno do fluxo de caixa é a taxa de juros $i^*$, tal que:

$$V(i^*) = \frac{(12.157)}{(1+i^*)^0} + \frac{(29.622)}{(1+i^*)^1} + \frac{(3.749)}{(1+i^*)^2} + \frac{1.397}{(1+i^*)^3} + \ldots + \frac{4.233}{(1+i^*)^{14}} + \frac{4.116}{(1+i^*)^{15}} = 0$$

Onde $V(i^*)$ é o valor atual do fluxo de caixa à taxa de juros $i^*$.



A determinação da taxa $i^*$ é feita por tentativa e erro. No caso da taxa de retorno de uma planilha de financiamento, sabemos que $i^*$ será igual ou maior que a taxa de juros cobrada.

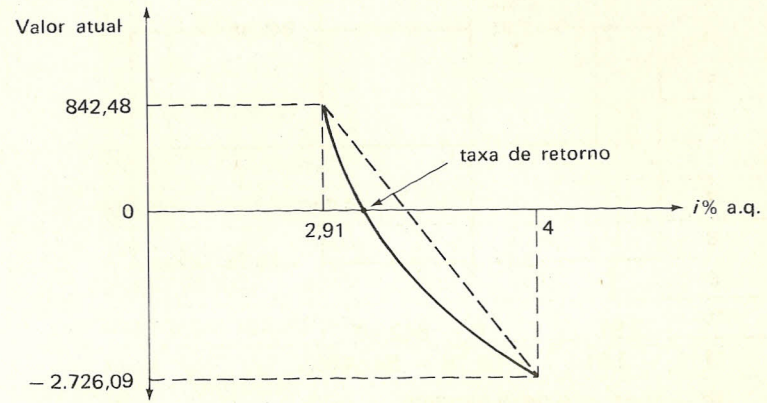
a) *1ª iteração:* calculando o valor atual do fluxo, à taxa de 2,91% a.q., teremos:

$$i_1 = 2{,}91\%\ \text{a.q.} \Longrightarrow V(i_1) = 842{,}48$$

Como o valor atual é positivo, à taxa de 2,91% a.q., "arrisca-se" uma taxa um pouco superior, digamos, 4% a.q.:

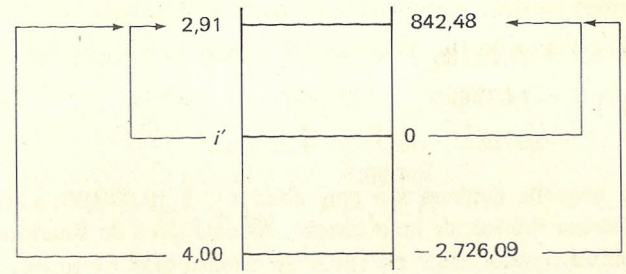
$$i_2 = 4\%\ \text{a.q.} \Longrightarrow V(i_2) = -2.726{,}09$$

Esta situação pode ser visualizada graficamente como segue:




Podemos obter uma estimativa da taxa de retorno, interpolando linearmente entre os dois valores atuais, visto que:

$$V(i_1) > 0 \quad \text{e} \quad V(i_2) < 0$$



Então:

$$\frac{i' - 2{,}91}{4{,}00 - 2{,}91} = \frac{0 - 842{,}48}{-2.726{,}09 - 842{,}48}$$

$$i' = 2{,}91 + 1{,}09(0{,}236083)$$

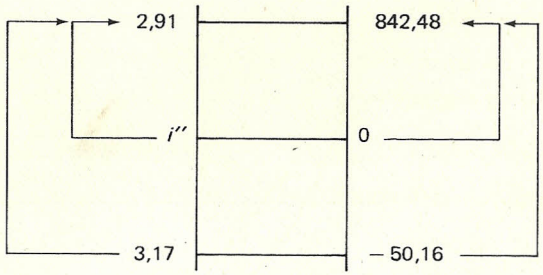
$$\therefore\ i' \cong 3{,}17\%\ \text{a.q.}$$

Calculando-se o valor atual à taxa de 3,17% a.q., vem:

$$i' = 3{,}17\%\ \text{a.q.} \Longrightarrow V(i') = -50{,}16$$

Portanto, o valor atual ainda não é nulo. Caso se deseje uma taxa mais aproximada, interpola-se entre os novos valores.

b) *2ª iteração:* processando-se a segunda interpolação, temos:




$$\frac{i'' - 2{,}91}{3{,}17 - 2{,}91} = \frac{0 - 842{,}48}{-50{,}16 - 842{,}48}$$

$$i'' = 2{,}91 + 0{,}26(0{,}943807)$$

$$\therefore\ i'' = 3{,}1554\%\ \text{a.q.}$$

Calculando-se o valor atual à taxa de 3,1554% a.q., obtemos:

$$i'' = 3{,}1554\%\ \text{a.q.} \Longrightarrow V(i'') = -0{,}75$$

Por conseguinte, o custo efetivo do empréstimo é de 3,1554% a.q., ou em termos anuais:

$$i + i = (1{,}031554)^3$$

$$i + i = 1{,}097680$$

$$\therefore\ i = 0{,}97680 \quad \text{ou} \quad i \cong 9{,}77\%\ \text{a.a.}$$

10. A uma pequena empresa são emprestados Cr$ 50.000,00, a serem pagos pelo Sistema Francês de amortização. As condições do financiamento são as seguintes:



a) Prazo: 10 semestres.

b) Juros: 6% a.s.

c) Despesas contratuais: 2% sobre o valor do financiamento a ser pago no ato.

d) Imposto sobre Operações Financeiras (IOF): 1% sobre o total do financiamento mais encargos.

Qual é o custo efetivo anual cobrado pela agência financiadora? Separar os custos financeiros período a período.

*Resolução:*

a) Prestação (R):

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$P = 50.000$$

$$i = 6\%\ \text{a.s.}$$

$$n = 10\ \text{semestres}$$

$$50.000 = R \cdot a_{\overline{10}|6}$$

$$50.000 = R(7{,}360087)$$

$$R = \frac{50.000}{7{,}360087}$$

$$R = \text{Cr\$ } 6.793{,}40$$

b) Despesas Contratuais (DC):

$$DC = 0{,}02P$$

$$DC = 0{,}02(50.000)$$

$$\therefore\ DC = \text{Cr\$ } 1.000{,}00$$

c) Imposto sobre Operações Financeiras (IOF):

$$IOF = 0{,}01\,[R \cdot n + DC]$$

Como nas prestações estão incluídos os juros e a amortização do principal, então

$$R \cdot n = \text{Principal} + \text{Juros}$$

$$IOF = 0{,}01\,[6.793{,}40(10) + 1.000{,}00]$$

$$IOF = 0{,}01\,(68.934{,}00)$$

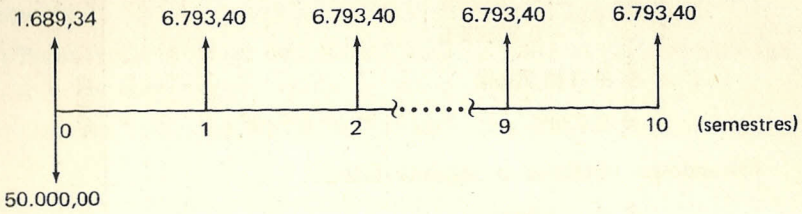
$$IOF = \text{Cr\$ } 689{,}34$$

PLANILHA DE FINANCIAMENTO

| Semestres ($k$) | Saque | Saldo Devedor ($Sd_k$) | Amortização ($A_k$) | Juros ($J_k$) | Prestação ($A_k + J_k$) (1) | IOF (2) | Despesas Contrato (3) | Desembolso Total (1) + (2) + (3) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 50.000,00 | 50.000,00 | – | – | – | 689,34 | 1.000,00 | 1.689,34 |
| 1 | – | 46.206,60 | 3.793,40 | 3.000,00 | 6.793,40 | – | – | 6.793,40 |
| 2 | – | 42.185,60 | 4.021,00 | 2.772,40 | 6.793,40 | – | – | 6.793,40 |
| 3 | – | 37.923,34 | 4.262,26 | 2.531,14 | 6.793,40 | – | – | 6.793,40 |
| 4 | – | 33.405,34 | 4.518,00 | 2.275,40 | 6.793,40 | – | – | 6.793,40 |
| 5 | – | 28.616,26 | 4.789,08 | 2.004,32 | 6.793,40 | – | – | 6.793,40 |
| 6 | – | 23.539,84 | 5.076,98 | 1.716,98 | 6.793,40 | – | – | 6.793,40 |
| 7 | – | 18.158,83 | 5.381,01 | 1.412,39 | 6.793,40 | – | – | 6.793,40 |
| 8 | – | 12.454,96 | 5.703,87 | 1.089,53 | 6.793,40 | – | – | 6.793,40 |
| 9 | – | 6.408,86 | 6.046,10 | 747,30 | 6.793,40 | – | – | 6.793,40 |
| 10 | – | – | 6.408,86 | 384,54 | 6.793,40 | – | – | 6.793,40 |
| Total | – | – | 50.000,00 | 17.934,00 | 67.934,00 | 689,34 | 1.000,00 | 69.623,34 |



O fluxo de caixa será:




Portanto, a agência financiadora empresta à empresa Cr$ 48.310,66, ou seja, 50.000 – 1.689,34, e recebe 10 prestações semestrais de Cr$ 6.793,40.

O custo efetivo será a taxa de juros, tal que:

$$48.310,66 = 6.793,40\, a_{\overline{10}|i}$$

Ou seja, recaímos no modelo básico de anuidades.

$$\frac{48.310,66}{6.793,40} = a_{\overline{10}|i}$$

$$7,111411 = a_{\overline{10}|i}$$

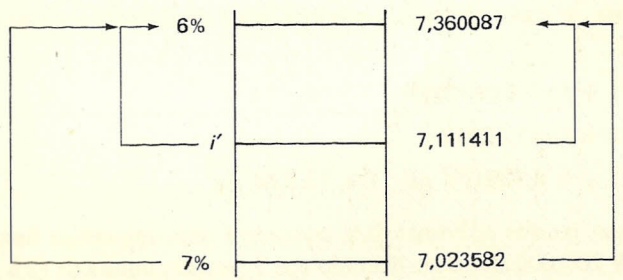
Procurando-se na tabela financeira (ou fazendo-se o cálculo do $a_{\overline{n}|i}$), temos:

$$a_{\overline{10}|6} = 7,360087$$

e

$$a_{\overline{10}|7} = 7,023582$$

Interpolando-se linearmente, vem:



$$\frac{i' - 6}{7 - 6} = \frac{7{,}111411 - 7{,}360087}{7{,}023582 - 7{,}360087}$$

$$\frac{i' - 6}{1} = \frac{-0{,}248676}{-0{,}336505}$$

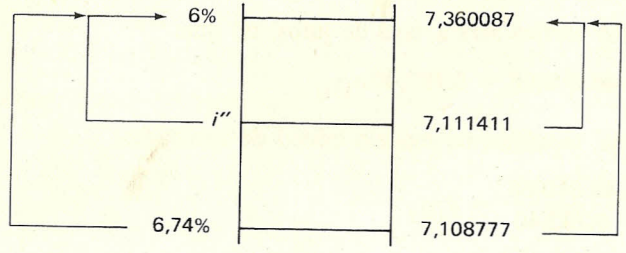
$$i' = 6 + 1(0{,}7390)$$

$$\therefore\ i' = 6{,}739\%\ \text{a.s.} \quad \text{ou} \quad i' \cong 6{,}74\%\ \text{a.s.}$$

Testando-se, obtém-se o seguinte fator:

$$a_{\overline{10}|6{,}74} = 7{,}108777$$

Na segunda iteração, vem:




$$\frac{i'' - 6}{6{,}74 - 6} = \frac{7{,}111411 - 7{,}360087}{7{,}108777 - 7{,}360087}$$

$$\frac{i'' - 6}{0{,}74} = \frac{-0{,}248676}{-0{,}251310}$$

$$i'' = 6 + 0{,}74(0{,}9895)$$

$$\therefore\ i'' = 6{,}732\%\ \text{a.s.}$$

Testando-se, temos:

$$a_{\overline{10}|6{,}732} = 7{,}111424$$

Portanto, o custo efetivo do empréstimo é de 6,732% a.s., ou em termos anuais:

$$1 + i = (1{,}06732)^2$$

$$1 + i = 1{,}13917$$

$$\therefore\ i = 0{,}13917 \quad \text{ou} \quad i \cong 13{,}92\%\ \text{a.a.}$$

11. O Banco Irmãos & Primos S.A. concede a uma empresa o financiamento de Cr$ 200.000,00, a ser liberado em 3 parcelas anuais de Cr$ 20.000,00 (1º ano), Cr$ 100.000,00 (2º ano) e Cr$ 80.000,00 (3º ano). A taxa de juros contratada é de 20% a.a. e a amortização será feita pelo Sistema Americano. As principais características do financiamento são:

a) Prazo Total: 6 anos, incluindo 3 anos de carência, período este em que não serão pagos os juros.

b) Despesas Contratuais: Cr$ 2.000,00 a serem pagos no ato da assinatura do contrato de financiamento.

A empresa, prevendo a amortização que deverá efetuar ao fim do 6º ano, resolve constituir um fundo de amortização (Sinking Fund), efetuando 4 depósitos iguais, anuais, a partir do 3º ano, em uma instituição que paga 15% a.a. sobre o saldo credor.

De posse de todos os dados acima expostos, pergunta-se:

1º) Qual é o custo efetivo do empréstimo do Banco Irmãos & Primos S.A.?

2º) Qual é o custo efetivo final deste empréstimo para a empresa financiada?

*Resolução:*

Para responder a essas questões devemos primeiro calcular a planilha do financiamento do banco e em segundo lugar, considerando o fundo de amortização, calcular o fluxo de caixa líquido da empresa.

PLANILHA DE FINANCIAMENTO

| *Ano* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Juros* ($J_k$) (1) | *Amortização* ($A_k$) (2) | *Despesas Contrato* (3) | *Prestação* (1) + (2) + (3) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 20.000,00 | 20.000,00 | – | – | 2.000,00 | 2.000,00 |
| 1 | 100.000,00 | 124.000,00 | – | – | – | – |
| 2 | 80.000,00 | 228.800,00 | – | – | – | – |
| 3 | – | 228.800,00 | 45.760,00 | – | – | 45.760,00 |
| 4 | – | 228.800,00 | 45.760,00 | – | – | 45.760,00 |
| 5 | – | 228.800,00 | 45.760,00 | – | – | 45.760,00 |
| 6 | – | 228.800,00 | 45.760,00 | 228.800,00 | – | 274.560,00 |
| Total | – | – | 183.040,00 | 228.800,00 | 2.000,00 | 421.840,00 |

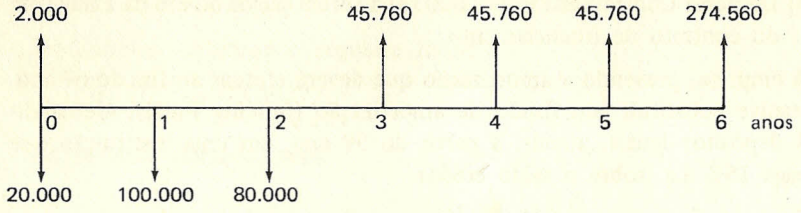
O saldo devedor do período 1 ($Sd_1$) foi obtido por:

$$Sd_1 = 20.000(0{,}20) + 20.000 + 100.000$$

$$Sd_1 = 4.000 + 20.000 + 100.000 = \text{Cr\$ } 124.000{,}00$$

Os juros são incorporados ao saldo devedor porque não foram pagos. O mesmo raciocínio é aplicado para a determinação do saldo devedor do período 2 ($Sd_2$).

Elaborando do fluxo de caixa do banco, teremos:




A taxa de retorno do fluxo de caixa do banco, que será o custo efetivo cobrado, será a taxa "$i$" tal que:

$$0 = \frac{(18.000)}{(1+i)^0} + \frac{(100.000)}{(1+i)^1} + \frac{(80.000)}{(1+i)^2} + \frac{45.760}{(1+i)^3} + \frac{45.760}{(1+i)^4} + \frac{45.760}{(1+i)^5} + \frac{274.560}{(1+i)^6}$$

Considerar os fluxos de caixa entre parênteses como sendo fluxos negativos, ou seja, saída de caixa.

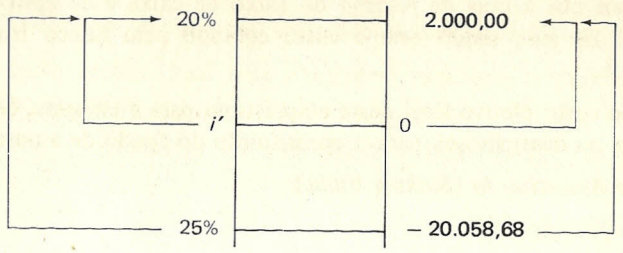
Usando taxas de desconto arbitrárias, teremos os seguintes valores atuais:

FLUXO DE CAIXA DESCONTADO

| *Ano* | *Fluxo de Caixa* | *Fluxos Descontados a 20% a.a.* | *Fluxos Descontados a 25% a.a.* |
|---|---|---|---|
| 0 | (18.000,00) | (18.000,00) | (18.000,00) |
| 1 | (100.000,00) | (83.333,33) | (80.000,00) |
| 2 | (80.000,00) | (55.555,55) | (51.200,00) |
| 3 | 45.760,00 | 26.481,48 | 23.429,12 |
| 4 | 45.760,00 | 22.067,90 | 18.743,30 |
| 5 | 45.760,00 | 18.389,91 | 14.994,64 |
| 6 | 274.560,00 | 91.949,59 | 71.974,26 |
| Total | 213.840,00 | 2.000,00 | (20.058,68) |



Como o valor atual é positivo a 20% a.a. e negativo a 25% a.a., vamos proceder a interpolação:




$$\frac{i' - 20}{25 - 20} = \frac{0 - 2.000,00}{-20.058,68 - 2.000,00}$$

$$\frac{i' - 20}{5} = \frac{-2.000,00}{-22.058,68}$$

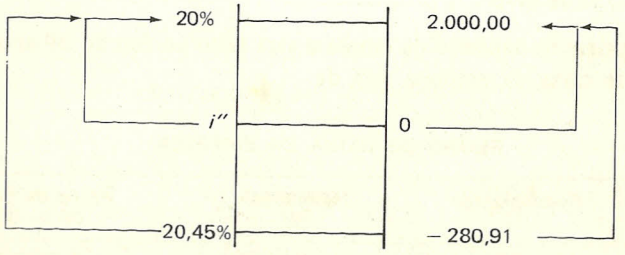
$$i' = 20 + 5\,(0,090667)$$

$$\therefore\ i' = 20,45\%\ \text{a.a.}$$

Calculando-se o valor atual à taxa de 20,45% a.a., vem:

$$V(20,45\%) = -280,91$$

Processando-se a segunda interpolação, temos:




$$\frac{i'' - 20}{20,45 - 20} = \frac{0 - 2.000,00}{-280,91 - 2.000,00}$$

$$\frac{i'' - 20}{0,45} = \frac{-2.000,00}{-2.280,91}$$

$$i'' = 20 + 0,45(0,876843)$$

$$\therefore\ i'' = 20,39\%\ \text{a.a.}$$

Testando esta taxa, teremos:

$$V(20{,}39\%) = 19{,}48$$

Concluímos que a taxa de retorno do fluxo de caixa é de aproximadamente 20,4% a.a., sendo este o custo cobrado pelo Banco Irmãos & Primos S.A.

Quanto ao custo efetivo final deste empréstimo para a empresa, devem-se considerar os desembolsos para a constituição do fundo de amortização.

*Fundo de Amortização* (*Sinking Fund*):

Taxa de aplicação: 15% a.a.

Número de depósitos: 4 (anuais)

O valor a ser amortizado ao fim do 6º ano será de Cr$ 228.800,00; portanto:

$$S = R s_{\overline{n}|i}$$

$$S = 228.800$$

$$i = 15\% \text{ a.a.}$$

$$n = 4 \text{ anos}$$

$$228.800 = R s_{\overline{4}|15}$$

$$228.800 = R(4{,}993375)$$

$$R = \frac{228.800}{4{,}993375} = \text{Cr\$ } 45.820{,}71$$

Como o primeiro depósito da empresa será feito ao fim do 3º ano, então o fluxo de caixa da empresa será de:

FLUXO DE CAIXA DA EMPRESA

| *Ano* | *Recebimentos* (1) | *Desembolsos* (2) | *Fluxo de Caixa* (1) – (2) |
|---|---|---|---|
| 0 | 20.000,00 | 2.000,00 | 18.000,00 |
| 1 | 100.000,00 | – | 100.000,00 |
| 2 | 80.000,00 | – | 80.000,00 |
| 3 | – | 91.580,71 | (91.580,71) |
| 4 | – | 91.580,71 | (91.580,71) |
| 5 | – | 91.580,71 | (91.580,71) |
| 6 | – | 91.580,71 | (91.580,71) |
| Total | 200.000,00 | 368.322,84 | (168.322,71) |



Na coluna de desembolsos tem-se que, a partir do 3º ano, a empresa despenderá caixa para pagamento dos juros do banco para o fundo de amortização:

$$\text{Cr\$ } 91.580{,}71 = \text{Cr\$ } 45.760{,}00 + 45.820{,}71$$

O custo efetivo final para a empresa será igual à taxa de retorno do fluxo de caixa:

$$0 = \frac{18.000{,}00}{(1+i)^0} + \frac{100.000{,}00}{(1+i)^1} + \frac{80.000{,}00}{(1+i)^2} + \frac{(91.580{,}71)}{(1+i)^3} + \frac{(91.580{,}71)}{(1+i)^4} + \frac{(91.580{,}71)}{(1+i)^5} + \frac{(91.580{,}71)}{(1+i)^6}$$

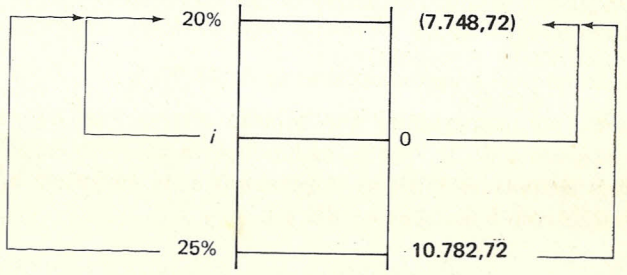
Calculando o valor atual a taxas arbitrárias, vem:

$$V(20\%) = (7.748{,}72)$$

$$V(25\%) = 10.782{,}72$$

**Nota:** Como a inversão nos fluxos é de *positivo para negativo*, então o valor atual dos fluxos crescerá à medida que se aumenta a taxa de desconto.

Interpolando, temos:




$$\frac{i - 20}{25 - 20} = \frac{0 - [-7.748{,}72]}{10.782{,}72 - [-7.748{,}72]}$$

$$\frac{i - 20}{5} = \frac{7.748{,}72}{18.531{,}44}$$

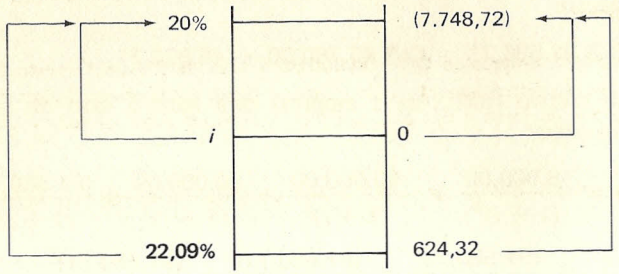
$$i = 20 + 5(0{,}418139)$$

$$\therefore\ i \cong 22{,}09\% \text{ a.a.}$$

Testando-se esta taxa, tem-se:

$$V(22{,}09\%) = 624{,}32$$

Pela segunda interpolação, vem:




$$\frac{i - 20}{22{,}09 - 20} = \frac{0 - [-7.748{,}72]}{624{,}32 - [-7.748{,}72]}$$

$$\frac{i - 20}{2{,}09} = \frac{7.748{,}72}{8.373{,}04}$$

$$i = 20 + 2{,}09(0{,}925437)$$

$$\therefore\ i = 21{,}93\%\ \text{a.a.}$$

A esta taxa o valor atual do fluxo é:

$$V(21{,}93\%) = 17{,}09$$

A taxa de retorno é aproximadamente de 21,9% a.a.

Conclui-se, por conseguinte, que o custo efetivo final do empréstimo para a empresa é de 21,9% a.a., na hipótese de aceitar o empréstimo nas condições estipuladas (Sistema Americano) e de constituir o fundo de amortização com aplicações a 15% a.a.

## 5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Um banco de investimento empresta Cr$ 500.000,00 a um cliente, contratando-se a taxa de 10% a.a., com capitalizações semestrais sem carência. A devolução do principal far-se-ia mediante 5 parcelas semestrais de:

   1ª parcela: Cr$ 50.000,00
   2ª parcela: Cr$ 75.000,00
   3ª parcela: Cr$ 100.000,00
   4ª parcela: Cr$ 125.000,00
   5ª parcela: Cr$ 150.000,00

   Os juros serão cobrados sobre o saldo devedor, vencendo a cada semestre. Construir a planilha do financiamento.



2. Um empréstimo de Cr$ 80.000,00 deve ser pago em 4 amortizações constantes anuais sem carência. A taxa de juros contratada é de 8% a.a. Construir planilha de financiamento.

3. O Banco L & S emprestou Cr$ 200.000,00 à taxa de 9% a.a. O prazo total para a amortização do financiamento é de 6 anos e meio, incluindo-se 2 anos de carência. O pagamento de juros e das amortizações constantes deve ser semestral. Construir planilha.

4. O financiamento obtido por uma empresa obedecerá o seguinte cronograma de saques:

| *Data* | *Valor* |
|---|---|
| 30.04.76 | Cr$ 20.000,00 |
| 30.08.76 | Cr$ 50.000,00 |
| 30.12.76 | Cr$ 100.000,00 |

   A taxa de juros contratada é de 15% a.a., vencendo juros quadrimestrais, sendo refinanciados durante carência. O sistema de amortizações adotado é o constante (SAC), vencendo a primeira amortização em 30.04.78. O prazo total do financiamento é de 5 anos. Construir planilha (considerar ano comercial).

5. O Banco MF concede um financiamento de Cr$ 750.000,00, a ser liberado em 3 parcelas iguais semestrais e consecutivas. No tocante aos encargos financeiros, teremos juros de 14% a.a., semestrais, e uma comissão de 2% sobre o valor de cada parcela liberada, descontada no ato. As amortizações serão semestrais, ocorrendo a primeira 2 anos após o primeiro saque. As parcelas de amortização, seqüencialmente, devem ser:

   1ª parcela: Cr$ 50.000,00
   2ª parcela: Cr$ 100.000,00
   3ª parcela: Cr$ 100.000,00
   4ª parcela: Cr$ 150.000,00
   5ª parcela: Cr$ 150.000,00
   6ª parcela: Cr$ 200.000,00

   Qual deve ser a planilha e qual é o custo real do financiamento?

6. Um banco empresta Cr$ 1.000.000,00 sob as seguintes condições:
   a) juros de 20% a.a., pagos semestralmente;
   b) carência de 1 ano;
   c) comissão de abertura de crédito de 0,5% sobre o valor financiado, pago no ato;
   d) comissão de 1% sobre o saldo devedor anual;
   e) imposto sobre operações financeiras (IOF) de 1% sobre o total do financiamento (principal + encargos financeiros), pago no ato;
   f) amortizações semestrais constantes;
   g) prazo total 4 anos e meio.

   Construir a planilha de financiamento e calcular o custo anual deste empréstimo.

7. Uma empresa recebe um financiamento de Cr$ 300.000,00, em 31.12.75, para ser pago em 6 prestações semestrais pelo Sistema Francês. Desejando-se saber quais serão

as parcelas de juros anuais, construir planilha, considerando-se a taxa de juros efetiva de 30% a.a.

8. Qual será a primeira prestação trimestral de um financiamento de Cr$ 50.000,00 com carência de 3 anos, tendo sido os juros capitalizados na carência? Considerando-se a taxa de juros de 16% a.a., Sistema Francês – Tabela Price e 12 prestações – separar a parcela referente aos juros na primeira prestação trimestral.

9. Um empréstimo de Cr$ 200.000,00 foi contratado à taxa de 10% a.a. para ser saldado em 5 prestações anuais (Sistema Francês). Calcular a planilha respectiva, considerando-se o IOF de 1% sobre principal mais encargos, descontado no ato. Qual é o custo anual do financiamento e qual o total de juros pagos?

10. A empresa "Construções S.A." obteve um financiamento de Cr$ 500.000,00, à taxa nominal de 12% ao ano, comprometendo-se a saldá-lo em 6 prestações semestrais. O método adotado é o do Sistema Francês. O banco financiador concede 2 anos de carência, sendo, nesse prazo, os juros capitalizados. Construir a planilha separando, nas prestações, os juros das amortizações.

11. O valor financiado é de Cr$ 150.000,00, tendo-se contratado a taxa de 14% a.a. Foi adotado o Sistema Americano de amortização, determinando-se o prazo de 4 anos para liquidação do financiamento. Construir a planilha do financiamento.

12. Uma empresa recebeu um empréstimo de Cr$ 5.000.000,00, compromissando-se a devolvê-lo ao fim de 6 anos, pagando anualmente apenas os juros vencidos do período. A taxa contratada é de 10% a.a. Planejando a devolução do principal, a empresa resolve constituir um fundo de amortização, aplicando anualmente certa quantia fixa em uma instituição que paga 8% a.a. Qual será o desembolso anual, juros pagos mais depósito no fundo de reserva (Sistema Americano e "Sinking Fund")?

13. Um financista tomou emprestado Cr$ 100.000,00 à taxa de 25% a.a., pelo prazo de 4 anos. Optando pelo Sistema Americano, constitui um fundo de amortização, aplicando seus depósitos anuais a 27% a.a. Construir o quadro demonstrativo dos desembolsos anuais e da evolução do fundo de reserva.

14. O montante de Cr$ 450.000,00 é financiado em 5 anos à taxa de 18% a.a., Sistema Americano. Se o tomador do empréstimo pudesse optar pelo Sistema Francês, mantendo-se a taxa de juros (18% a.a.) e o prazo (5 anos), quanto perderia, caso a taxa de aplicação do fundo de reserva fosse de 15% a.a.?

## Respostas

1.

| *Semestre* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Juros* (1) $J_k = iSd_{k-1}$ | *Amortiz.* (2) ($A_k$) | *Prestação* (1) + (2) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 500.000 | – | – | – |
| 1 | 450.000 | 25.000 | 50.000 | 75.000 |
| 2 | 375.000 | 22.500 | 75.000 | 97.500 |



1. Continuação

| *Semestre* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Juros* (1) $J_k = iSd_{k-1}$ | *Amortiz.* (2) ($A_k$) | *Prestação* (1) + (2) |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 275.000 | 18.750 | 100.000 | 118.750 |
| 4 | 150.000 | 13.750 | 125.000 | 138.750 |
| 5 | – | 7.500 | 150.000 | 157.500 |
| Total | – | 87.500 | 500.000 | 587.500 |

2.

| *Ano* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Juros* (1) ($J_k$) | *Amortiz.* (2) ($A_k$) | *Prestação* (1) + (2) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 80.000 | – | – | – |
| 1 | 60.000 | 6.400 | 20.000 | 26.400 |
| 2 | 40.000 | 4.800 | 20.000 | 24.800 |
| 3 | 20.000 | 3.200 | 20.000 | 23.200 |
| 4 | – | 1.600 | 20.000 | 21.600 |
| Total | – | 16.000 | 80.000 | 96.000 |

3.

| *Semestre* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Juros* (1) ($J_k$) | *Amortiz.* (2) ($A_k$) | *Prestação* (1) + (2) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 200.000 | – | – | – |
| 1 | 200.000 | 9.000 | – | 9.000 |
| 2 | 200.000 | 9.000 | – | 9.000 |
| 3 | 200.000 | 9.000 | – | 9.000 |
| 4 | 180.000 | 9.000 | 20.000 | 29.000 |
| 5 | 160.000 | 8.100 | 20.000 | 28.100 |
| 6 | 140.000 | 7.200 | 20.000 | 27.200 |
| 7 | 120.000 | 6.300 | 20.000 | 26.300 |
| 8 | 100.000 | 5.400 | 20.000 | 25.400 |
| 9 | 80.000 | 4.500 | 20.000 | 24.500 |
| 10 | 60.000 | 3.600 | 20.000 | 23.600 |
| 11 | 40.000 | 2.700 | 20.000 | 22.700 |
| 12 | 20.000 | 1.800 | 20.000 | 21.800 |
| 13 | – | 900 | 20.000 | 20.900 |
| Total | – | 76.500 | 200.000 | 276.500 |

4.

| *Quadrimestre* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Saques* | *Juros* (1) ($J_k$) | *Amortização* (2) ($A_k$) | *Prestação* (1) + (2) |
|---|---|---|---|---|---|
| 04.76 | 20.000 | 20.000 | – | – | – |
| 08.76 | 71.000 | 50.000 | 1.000 | – | – |
| 12.76 | 174.550 | 100.000 | 3.550 | – | – |
| 04.77 | 183.278 | – | 8.728 | – | – |
| 08.77 | 192.442 | – | 9.164 | – | – |
| 12.77 | 202.064 | – | 9.622 | – | – |
| 04.78 | 181.858 | – | 10.103* | 20.206 | 30.309 |
| 08.78 | 161.652 | – | 9.093 | 20.206 | 29.299 |
| 12.78 | 141.446 | – | 8.083 | 20.206 | 28.289 |
| 04.79 | 121.240 | – | 7.072 | 20.206 | 27.278 |
| 08.79 | 101.034 | – | 6.062 | 20.206 | 26.268 |
| 12.79 | 80.828 | – | 5.052 | 20.206 | 25.258 |
| 04.80 | 60.622 | – | 4.041 | 20.206 | 24.247 |
| 08.80 | 40.416 | – | 3.031 | 20.206 | 23.237 |
| 12.80 | 20.210 | – | 2.021 | 20.206 | 22.227 |
| 04.81 | – | – | 1.010 | 20.210 | 21.220 |
| Total | – | – | 55.568 | 202.064 | 257.632 |

(*) Soma a partir deste valor.

5.

| *Sem.* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Saques* | *Comissão* (1) | *Juros* (2) ($J_k$) | *Amortiz.* (3) ($A_k$) | *Prestação* (1) + (2) + (3) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 250.000 | 250.000 | 5.000 | – | – | 5.000 |
| 1 | 500.000 | 250.000 | 5.000 | 17.500 | – | 22.500 |
| 2 | 750.000 | 250.000 | 5.000 | 35.000 | – | 40.000 |
| 3 | 750.000 | – | – | 52.500 | – | 52.500 |
| 4 | 700.000 | – | – | 52.500 | 50.000 | 102.500 |
| 5 | 600.000 | – | – | 49.000 | 100.000 | 149.000 |
| 6 | 500.000 | – | – | 42.000 | 100.000 | 142.000 |
| 7 | 350.000 | – | – | 35.000 | 150.000 | 185.000 |
| 8 | 200.000 | – | – | 24.500 | 150.000 | 174.500 |
| 9 | – | – | – | 14.000 | 200.000 | 214.000 |
| Total | – | – | 15.000 | 322.000 | 750.000 | 1.087.000 |

O custo real é 0,0742 a.s. ou, aproximadamente, 7,42% a.s.



6.

6.

| *Sem.* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Abert. Créd.* (1) | *Comissão* (2) | *IOF* (3) | *Juros* (4) ($J_k$) | *Amortiz.* (5) ($A_k$) | *Prestação* 1+2+3+ +4+5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.000.000 | 5.000 | – | 15.750 | – | – | 20.750 |
| 1 | 1.000.000 | – | – | – | 100.000 | – | 100.000 |
| 2 | 875.000 | – | 8.750 | – | 100.000 | 125.000 | 233.750 |
| 3 | 750.000 | – | – | – | 87.500 | 125.000 | 212.500 |
| 4 | 625.000 | – | 6.250 | – | 75.000 | 125.000 | 206.250 |
| 5 | 500.000 | – | – | – | 62.500 | 125.000 | 187.500 |
| 6 | 375.000 | – | 3.750 | – | 50.000 | 125.000 | 178.750 |
| 7 | 250.000 | – | – | – | 37.500 | 125.000 | 162.500 |
| 8 | 125.000 | – | 1.250 | – | 25.000 | 125.000 | 151.250 |
| 9 | – | – | – | – | 12.500 | 125.000 | 137.500 |
| Total | – | 5.000 | 20.000 | 15.750 | 550.000 | 1.000.000 | 1.590.750 |

Taxa de juros efetiva: 10,9% a.s. ou 22,99% a.a.

7.

| *Semestre* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Prestação* ($J_k + A_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 300.000,00 | – | – | – |
| 1 | 264.868,32 | 42.052,63 | 35.131,68 | 77.184,31 |
| 2 | 224.812,04 | 37.128,03 | 40.056,28 | 77.184,31 |
| 3 | 179.140,85 | 31.513,12 | 45.671,19 | 77.184,31 |
| 4 | 127.067,68 | 25.111,14 | 52.073,17 | 77.184,31 |
| 5 | 67.695,14 | 17.811,77 | 59.372,54 | 77.184,31 |
| 6 | – | 9.489,17 | 67.695,14 | 77.184,31 |
| Total | – | 163.105,86 | 300.000,00 | 463.105,86 |

8. Prestação: Cr$ 8.201,61
Juros: Cr$ 3.078,91
Amortização: Cr$ 5.122,70

9.

| *Ano* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Juros* (1) ($J_k$) | *Amortização* (2) ($A_k$) | *IOF* (3) | *Prestação* (1) + (2) + + (3) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 200.000,00 | – | – | 2.637,98 | 2.637,98 |
| 1 | 167.240,50 | 20.000,00 | 32.759,50 | – | 52.759,50 |
| 2 | 131.205,05 | 16.724,05 | 36.035,45 | – | 52.759,50 |
| 3 | 91.566,06 | 13.120,51 | 39.638,99 | – | 52.759,50 |
| 4 | 47.963,17 | 9.156,61 | 43.602,89 | – | 52.759,50 |
| 5 | – | 4.796,33 | 47.963,17 | – | 52.759,50 |
| Total | – | 63.797,50 | 200.000,00 | 2.637,98 | 266.435,48 |

Total de juros: Cr$ 63.797,49
Custo anual: 10,52% a.a.

10.

| *Semestre* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Prestação* ($J_k + A_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 500.000,00 | – | – | – |
| 1 | 530.000,00 | 30.000,00 | – | – |
| 2 | 561.800,00 | 31.800,00 | – | – |
| 3 | 595.508,00 | 33.708,00 | – | – |
| 4 | 510.134,41 | 35.730,48* | 85.373,59 | 121.104,07 |
| 5 | 419.638,40 | 30.608,06 | 90.496,01 | 121.104,07 |
| 6 | 323.712,63 | 25.178,30 | 95.925,77 | 121.104,07 |
| 7 | 222.031,32 | 19.422,76 | 101.681,31 | 121.104,07 |
| 8 | 114.249,13 | 13.321,88 | 107.782,19 | 121.104,07 |
| 9 | – | 6.854,94 | 114.249,13 | 121.104,07 |
| Total | – | 131.116,42 | 595.508,00 | 726.624,42 |

(*) Soma a partir deste valor.



11.

| *Semestre* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Prestação* ($J_k + A_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 150.000 | – | – | – |
| 1 | 150.000 | 21.000 | – | 21.000 |
| 2 | 150.000 | 21.000 | – | 21.000 |
| 3 | 150.000 | 21.000 | – | 21.000 |
| 4 | – | 21.000 | 150.000 | 171.000 |

12. Cr$ 1.181.576,93, sendo Cr$ 500.000,00 em juros anuais pagos.
Cr$ 681.576,93 em depósitos no fundo de amortização.

13.

13.

| | *PLANILHA DO EMPRÉSTIMO* | | | | *PLANILHA DO FUNDO* | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Ano* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) | *Depósitos* | *Saldos do Fundo de Amortiz.* |
| 0 | 100.000 | – | – | – | – | – |
| 1 | 100.000 | 25.000 | – | 25.000 | 16.859,76 | 16.859,76 |
| 2 | 100.000 | 25.000 | – | 25.000 | 16.859,76 | 38.271,66 |
| 3 | 100.000 | 25.000 | – | 25.000 | 16.859,76 | 65.464,76 |
| 4 | – | 25.000 | 100.000 | 125.000 | 16.859,76 | 100.000,00 |
| Total | – | 100.000 | 100.000 | 200.000 | 67.439,04 | – |

Nota: Os desembolsos anuais serão de Cr$ 41.859,76, sendo Cr$ 25.000,00 referentes aos juros e Cr$ 16.859,76 referentes ao depósito para constituição do fundo de reserva.

14.

| PLANILHA DO EMPRÉSTIMO | | | | | PLANILHA DO FUNDO | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Ano* ($k$) | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) | *Depósitos* | *Saldos do Fundo* |
| 0 | 450.000 | – | – | – | – | – |
| 1 | 450.000 | 81.000 | – | 81.000 | 66.742 | 66.742,00 |
| 2 | 450.000 | 81.000 | – | 81.000 | 66.742 | 143.495,30 |
| 3 | 450.000 | 81.000 | – | 81.000 | 66.742 | 231.761,59 |
| 4 | 450.000 | 81.000 | – | 81.000 | 66.742 | 333.267,83 |
| 5 | – | 81.000 | 450.000 | 531.000 | 66.742 | 450.000,00 |
| Total | – | 405.000 | 450.000 | 855.000 | 333.710 | – |

p.418

Pelo Sistema Americano e "Sinking Fund", o devedor deve desembolsar anualmente:

Cr$ 147.742,00 = Cr$ 81.000,00 + Cr$ 66.742,00.

Pelo Sistema Francês o desembolso seria de:

Cr$ 143.900,03.

A diferença (Cr$ 147.742,00 – Cr$ 143.900,03 = Cr$ 3.841,97) sendo aplicada a 15% a.a. resultaria ao fim de 5 anos em Cr$ 25.904,03, que seria o valor perdido pela opção do Sistema Americano com "Sinking Fund".



Parte IV

# INFLAÇÃO

# 10

## Correção Monetária e Taxa de Juros Real

Um processo *inflacionário* é caracterizado pelo fato de que grande parte dos preços dos fatores de produção e de mercadorias se esteja elevando num dado período de tempo. Ou seja, o simples fato de que alguns preços oscilem (como, por exemplo, os preços dos produtos agrícolas na safra e na entressafra) não caracteriza uma inflação uma vez que tais oscilações possam estar sendo compensadas. É a alta generalizada de preços no tempo que faz surgir um processo inflacionário e é importante notar o fato de que os preços dos vários bens e serviços não se deslocam na mesma proporção.

Por *deflação* entende-se um processo no qual os preços *caem* num dado intervalo de tempo. A experiência brasileira é no sentido de processos inflacionários, onde os preços se têm elevado com maior ou menor intensidade.

A inflação não esperada tende a favorecer os devedores e os que pagam juros, a expensas dos credores e daqueles que recebem renda fixa. Ou seja, uma conseqüência da inflação não prevista é que ela provoca uma *transferência* de renda dos credores para os devedores. Outras conseqüências do processo inflacionário dizem respeito, por exemplo, à imprevisibilidade financeira e às ilusões de rentabilidade.

Os mecanismos de *correção monetária* ou *indexação* tendem a minorar tais efeitos do processo inflacionário. E porque tais métodos de correção são agora aplicados de modo generalizado na economia brasileira, torna-se importante seu conhecimento na Matemática Financeira.

## 1. ÍNDICES

Um índice de preços procura medir a mudança que ocorre nos níveis de preço de um período para outro. Para tanto calculam-se as variações que ocorreram num dado conjunto de bens, variações estas ponderadas pelas quantidades do período inicial ou final. Em outras palavras, um índice de preços mede a variação no custo de aquisição de um dado conjunto de bens de um período para outro.

Nestas condições, ao procurar-se saber qual a inflação que ocorreu numa dada coleção de bens, deve-se utilizar o índice especificamente calculado para a mesma. Em termos práticos, isto quer dizer que índices de preço diferentes medem *inflações* diferentes e o emprego de um dado índice requer uma análise prévia, para que se determine se o índice é adequado ao propósito em vista.

No Brasil a maioria dos cálculos e publicação de índices está a cargo da Fundação Getúlio Vargas do Rio de Janeiro. Tais índices são publicados mensalmente na revista Conjuntura Econômica: são os índices econômicos nacionais e regionais.

É muito comum o uso do "Índice Geral de Preços – Disponibilidade Interna (coluna 2)" ou simplesmente Índice 2, quando temos de deflacionar ou inflacionar uma série de valores monetários cujos acréscimos foram devidos a vários fatores. Isto porque o Índice 2 é o índice de preços mais geral disponível, isto é, o que *mede* a inflação do país.

*Exemplo:* as vendas do Grupo Trevo, que fabrica e vende produtos agrícolas e industriais, foram as seguintes:

1971 – Cr$ 121 milhões
1972 – Cr$ 133 milhões
1973 – Cr$ 165 milhões

Sabendo-se que o Índice 2 para estes anos teve a evolução seguinte:

1971 – 277
1972 – 324
1973 – 373



Pede-se:

a) Calcular a taxa de crescimento nominal das vendas, ano a ano;

b) Deflacionar a série de vendas com o Índice 2 e calcular a taxa real de crescimento para cada ano.

*Resolução:*

a) O crescimento das vendas, em termos nominais, é obtido dividindo-se o valor de um ano pelo valor do ano anterior:

| *Ano* | *Vendas Nominais* | % |
|---|---|---|
| 1971 | 121 | – |
| 1972 | 133 | 9,92 |
| 1973 | 165 | 24,06 |

Verifica-se que as vendas cresceram 9,9% de 1972 para 1971 e 24,1% de 1973 para 1972, em valor nominal.

b) Para deflacionar a série de vendas, construímos o índice de evolução dos preços, dividindo os valores do índice em cada ano pelo valor de 1971:

| *Ano* | *Índice 2* | *Índice 2 com Base 100 em 1971* |
|---|---|---|
| 1971 | 277 | 1,0000 |
| 1972 | 324 | 1,1697 |
| 1973 | 373 | 1,3466 |

A seguir, calcula-se a série deflacionada de vendas e a taxa de crescimento real:

| *Ano* | *Vendas Nominais* (1) | *Índice Deflator* (2) | *Vendas (*) Deflacionadas* (1) : (2) | % |
|---|---|---|---|---|
| 1971 | 121 | 1,0000 | 121 | – |
| 1972 | 133 | 1,1697 | 113,7 | (6,03) |
| 1973 | 165 | 1,3466 | 122,5 | 7,74 |

(*) A preços de 1971.

Em 1972 as vendas *decresceram* 6,0% em relação a 1971 e, em 1973 houve um crescimento real de 7,7% em relação a 1972. Se compararmos 1973 com 1971, verificamos que houve um acréscimo real de apenas 1,2%.

O exemplo anterior ilustra bem a importância de se trabalhar em valores constantes, pois apenas nessa condição podemos ter controle sobre o que é acréscimo devido à inflação e o que é acréscimo real obtido pela empresa.

No apêndice a este capítulo fez-se a comparação entre alguns índices de preços, com o objetivo de dar-se uma idéia das variações existentes.

## 2. CORREÇÃO MONETÁRIA

### 2.1. Histórico

A correção monetária foi introduzida como método para corrigir ou, pelo menos, minorar os efeitos distorcivos gerados pela inflação na economia. A introdução da correção monetária foi um importante instrumento auxiliar na estratégia gradualista de combate à inflação, porque uma política de tratamento de choque seria politicamente inviável para a nossa economia.

Foram estabelecidas normas para a correção monetária dos débitos fiscais, do ativo imobilizado, das depreciações, do capital de giro, dos títulos da dívida pública etc. Com a criação das Obrigações Reajustáveis do Tesouro Nacional (ORTN), que desempenharam papel importante no financiamento não-inflacionário do déficit federal, restabeleceu-se a confiança nos títulos da dívida pública.

A criação do Banco Nacional da Habitação (BNH) e o subseqüente estabelecimento de um sistema de correção monetária para os empréstimos, foi também um passo importante no sentido de generalizar o sistema de correção e de eliminar o déficit habitacional.

No início, os coeficientes de correção eram estabelecidos pelo Conselho Nacional de Economia, que depois foi extinto. A partir de 1967 os coeficientes passaram a ser fixados pelo Ministério do Planejamento, que é a atual Secretaria de Planejamento.

A correção monetária assumiu duas formas nas operações do mercado:

a) *Correção a priori* ou *prefixada:* Esta foi a forma adotada pelo mercado financeiro nas operações de curto e médio prazo, como letras de câmbio, certificados de depósitos etc. Baseia-se numa taxa de inflação esperada ou antecipada para o futuro.

b) *Correção a posteriori* ou *pós-fixada:* Foi este o processo adotado nos títulos e empréstimos de prazo mais longo e nas operações mais diretamente regulamentadas pelo governo, como nas ORTN, FGTS, PIS, Caderneta de Poupança etc.



Ao longo do tempo, todo o processo de correção acabou, de certo modo, vinculado aos índices de variação das ORTN. A variação das ORTN passou a desempenhar, para o mercado financeiro, o mesmo papel que já desempenhava o Índice 2 como medida de inflação. O próprio valor da Unidade Padrão de Capital (UPC), do BNH, ficou definido como sendo o valor da ORTN do mês inicial de cada trimestre civil.

A UPC passou a ser a unidade-padrão para os cálculos de financiamentos e amortizações do Sistema Financeiro Habitacional (SFH), ou seja, do sistema ligado ao BNH. Por seu lado, a ORTN passou a ser a unidade-padrão para os financiamentos feitos para o setor industrial, através da coordenação do Banco Nacional do Desenvolvimento Econômico (BNDE).

A partir de agosto de 1968 foi introduzida a *taxa flexível de câmbio*, também conhecida por processo de minidesvalorização cambial. Com isto a taxa cambial, que mede a relação entre o cruzeiro e as outras moedas, passou a variar em intervalos curtos e não regulares de tempo. Nestas condições, as mudanças nos valores da taxa de câmbio passaram a compensar, aproximadamente, as diferenças entre as inflações externa e interna. Uma medida da inflação externa é dada pela inflação americana, mas, para se ter uma medida melhor é preciso considerar-se a inflação que ocorre com os principais países com os quais o Brasil mantém comércio (notadamente a Europa, o Japão e os Estados Unidos).

Deste modo, estendeu-se ao comércio exterior o princípio da correção monetária, com excelentes resultados para as exportações do país.

### 2.2 Comparação entre os índices de variação das ORTN, Índice 2 e Taxa Cambial

Na tabela, a seguir, listaram-se para o mês de dezembro de cada ano os respectivos valores da ORTN, do Índice 2 e da Taxa Cambial média de dólares americanos:

| | *ORTN* | *Índice 2* | *CR$/US$* |
|---|---|---|---|
| 68 | 34,95 | 173 | 3,8125 |
| 69 | 41,42 | 208 | 4,3088 |
| 70 | 49,54 | 248 | 4,8741 |
| 71 | 60,77 | 297 | 5,6350 |
| 72 | 70,07 | 343 | 6,1920 |
| 73 | 79,07 | 397 | 6,1950 |
| 74 | 105,41 | 534 | 7,3680 |
| 75 | 130,93 | 690 | 8,9880 |

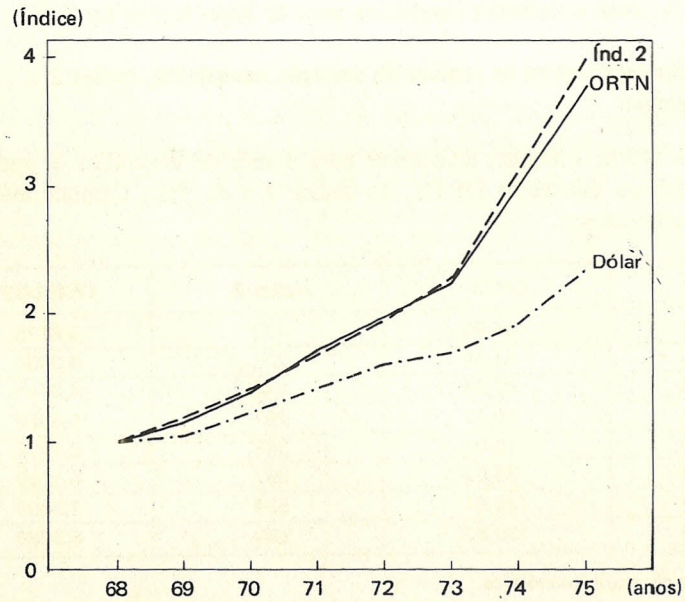
*Fonte:* Conjuntura Econômica.

Adotando o ano de 1968 como base de comparação, temos os seguintes índices de evolução:

| | *ORTN* | *Índice 2* | *CR$/US$* |
|---|---|---|---|
| 68 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 69 | 1,1851 | 1,2023 | 1,1302 |
| 70 | 1,4175 | 1,4335 | 1,2785 |
| 71 | 1,7388 | 1,7168 | 1,4780 |
| 72 | 2,0049 | 1,9827 | 1,6241 |
| 73 | 2,2624 | 2,2948 | 1,6249 |
| 74 | 3,0160 | 3,0867 | 1,9326 |
| 75 | 3,7462 | 3,9884 | 2,3575 |

Notamos que a evolução dos valores das ORTN e do Índice 2 é aproximadamente paralela. Já a taxa do cruzeiro em relação ao dólar cresceu bem menos, devido à já citada diferença entre as inflações que ocorrem no exterior e no Brasil.

O gráfico a seguir permite que se visualizem as evoluções citadas:






## 3. TAXA DE JUROS NOMINAL E REAL

Por *taxa nominal* entende-se aquela que vigora nas operações correntes. Quando temos um regime inflacionário, devemos distinguir, na taxa nominal, uma componente devida à inflação e outra devida à parcela de juros realmente recebida ou paga.

Consideremos as definições seguintes:

$C_0$ = capital inicial

$i$ = taxa nominal

$r$ = taxa real

$j$ = taxa de inflação

Vejamos como se comporta a taxa real com e sem inflação:

a) *Sem inflação:*

Nestas condições a taxa real e a nominal serão iguais, pois não teremos perda devida à erosão inflacionária.

Ao final de um período, o montante será:

$$C_1 = C_0(1 + i)$$

Como o valor de $C_0$ em termos de poder aquisitivo é o mesmo no início e no fim do período, podemos dizer que o valor real que se recebe é $C_1$.

Neste caso:

$$C_1 = C_0(1 + i) = C_0(1 + r)$$

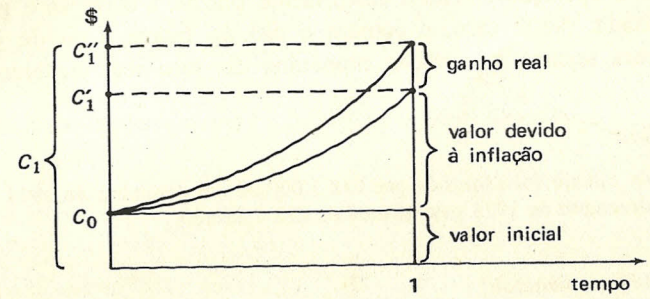
$$\therefore \quad \boxed{i = r}$$

b) *Com inflação:*

De modo análogo, ao final de 1 período, o *montante nominal* será:

$$C_1 = C_0(1 + i) \qquad (1)$$

Este montante tem duas componentes: uma devida ao processo inflacionário e outra devida à taxa de juros real recebida:



Para obter a decomposição, consideremos o montante devido à inflação:

$$C'_1 = C_0(1 + j) \qquad (2)$$

Sendo $j$ a taxa de inflação, $C'_j$ vai representar apenas o mesmo valor de $C_0$ ao final do período, em termos de poder aquisitivo.

Em outras palavras, $C'_1$ é o capital inicial ($C_0$) inflacionado pela taxa $j$ de inflação do período.

Agora pode-se obter a taxa real, considerando-se que o montante inflacionado ($C'_1$) pode ser aplicado a uma certa taxa ($r$), produzindo um montante ($C''_1$) que deve ser igual ao montante ($C_1$) produzido por $i$:

$$C''_1 = C'_1(1 + r) \qquad (3)$$

Substituindo-se nessa expressão o valor de $C'_1$, obtido na equação (2):

$$C''_1 = C_0(1 + r)(1 + j)$$

Note que $C_1''$ é igual ao montante $C_1$ obtido na equação (1), pois foi este o valor efetivamente recebido:

$$C''_1 = C_1$$

Ou seja:

$$C_0(1 + i) = C_0(1 + j)(1 + r)$$

$$\boxed{(1 + i) = (1 + j)(1 + r)}$$

Ou

$$\boxed{(1 + r) = \frac{1 + i}{1 + j}}$$

## 3.1. Aplicações

### 3.1.1. Curto/médio prazos

Quando a operação é feita a curto/médio prazos, a correção é, geralmente, prefixada. Neste caso, é comum o uso do Índice 2 ou do valor da ORTN para separar a correção monetária do juro real recebido ou pago.

*Exemplos:*

a) Uma letra de câmbio foi adquirida por Cr$ 1.000,00 em dezembro de 1974 para resgate em dezembro de 1975 pela quantia de Cr$ 1.350,00.

Calcular:

– A taxa de juros nominal.



A taxa de juros real, admitindo como taxa de inflação para o período aquela dada pelas variações do Índice 2 e da ORTN, apresentadas na Tabela do item 2.2.

*Resolução:*

a taxa de juros nominal é:

$$C = C_0(1 + i)$$

$$1.350 = 1.000(1 + i)$$

$$\therefore\ i = 35\%\ \text{a.a.}$$

A taxa de juros real é dada por:

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$

onde $j$ é a taxa de inflação.

Se adotarmos como medida da inflação a do Índice 2, temos:

$$1 + j_1 = \frac{690}{534} = 1{,}2921$$

Portanto:

$$1 + r_1 = \frac{1 + i}{1 + j_1}$$

$$1 + r_1 = \frac{1{,}35}{1{,}2921} \cong 1{,}0448$$

$$\therefore\ r_1 \cong 4{,}48\%\ \text{a.a.}$$

Adotando como medida de inflação o índice de variação da ORTN, temos:

$$1 + j_2 = \frac{130{,}93}{105{,}41} \cong 1{,}2421$$

Portanto:

$$1 + r_2 = \frac{1 + i}{1 + j_2}$$

$$1 + r_2 = \frac{1{,}35}{1{,}2421} \cong 1{,}0869$$

$$\therefore\ r_2 \cong 8{,}69\%\ \text{a.a.}$$

b) Uma pessoa fez uma aplicação em dezembro de 1971, que resgatou após um ano. O juro nominal recebido foi de 15%. Calcular a taxa de juro real, adotando o Índice 2 como medida de inflação (ver item 2.2.).

*Resolução:*

Se a taxa de juros nominal é de 15%, em 1 ano, tem-se:

$$1 + i = 1{,}15$$

Da tabela do item 2.2., tiramos:

$$1 + j = \frac{343}{297} \cong 1{,}1549$$

Logo, como:

$$1 + i = (1 + r)(1 + j)$$

Temos:

$$1{,}15 = (1 + r)(1{,}1549)$$

$$1 + r = \frac{1{,}15}{1{,}1549} \cong 0{,}9958$$

$$r = -0{,}0042$$

Ou

$$r = -0{,}42\% \text{ a.a.}$$

Isto significa que, na aplicação feita, houve uma perda (ou juro negativo) de 0,42% em um ano.

### 3.1.2. Médio/longo prazos

Nas operações de médio e longo prazos a tendência é de ter-se a correção pós-fixada. Entretanto, em alguns empréstimos, em períodos de até 2 ou 3 anos, podemos encontrar a correção prefixada.

Nas operações lideradas pelo BNDE e pelo BNH, as operações tendem a ter correção pós-fixada. O mesmo ocorre com as operações que envolvem empréstimos externos, a correção sendo dada pelas variações da taxa cambial.

*Exemplos:*

a) O Banco A oferece Cr$ 100.000,00 à taxa de juros de 8% a.a. mais correção monetária. Uma vez que o empréstimo foi contratado em junho de 1971, para ser amortizado em 5 parcelas semestrais, construir a planilha de financiamento pelo Sistema de Amortização Constante (SAC) com e sem correção monetária.

Considerar como correção monetária a variação no valor das ORTN dada pela tabela abaixo:

| | *1971* | *1972* | *1973* |
|---|---|---|---|
| Junho | 54,01 | 65,75 | 74,97 |
| Julho | 55,08 | 66,93 | 75,80 |
| Agosto | 56,18 | 67,89 | 76,48 |
| Setembro | 57,36 | 68,46 | 77,12 |
| Outubro | 58,61 | 68,95 | 77,87 |
| Novembro | 59,79 | 69,61 | 78,40 |
| Dezembro | 60,77 | 70,07 | 79,07 |



Pergunta-se: Qual será a taxa nominal dentro destas hipóteses?

Se o Banco B cobrar 20% a.a. de juros nominais, qual é o melhor financiamento?

*Resolução:*

1) A planilha *sem correção monetária* é a seguinte:

| *Semestres* | *Saldo Devedor* | *Amortizações* | *Juros* | *Prestação* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000 | – | – | – |
| 1 | 80.000 | 20.000 | 4.000 | 24.000 |
| 2 | 60.000 | 20.000 | 3.200 | 23.200 |
| 3 | 40.000 | 20.000 | 2.400 | 22.400 |
| 4 | 20.000 | 20.000 | 1.600 | 21.600 |
| 5 | – | 20.000 | 800 | 20.800 |
| Total | – | 100.000 | 12.000 | 112.000 |

O cálculo do índice de correção monetária é feito por semestre:

*1º semestre:* $\frac{\text{DEZ. 71}}{\text{JUN. 71}} = \frac{60{,}77}{54{,}01} \cong 1{,}1252$

*2º semestre:* $\frac{\text{JUN. 72}}{\text{JUN. 71}} = \frac{65{,}75}{54{,}01} \cong 1{,}2174$

*3º semestre:* $\frac{\text{DEZ. 72}}{\text{JUN. 71}} = \frac{70{,}07}{54{,}01} \cong 1{,}2974$

*4º semestre:* $\frac{\text{JUN. 73}}{\text{JUN. 71}} = \frac{74{,}97}{54{,}01} \cong 1{,}3881$

*5º semestre:* $\frac{\text{DEZ. 73}}{\text{JUN. 71}} = \frac{79{,}07}{54{,}01} \cong 1{,}4640$

2) *Corrigindo* a planilha anterior através dos índices calculados, tem-se:

| *Sem.* | *Índice* | *Saldo Devedor* | *Amortização* | *Juros* | *Prestação* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | – | 100.000,00 | – | – | – |
| 1 | 1,1252 | 90.016,00 | 22.504,00 | 4.500,80 | 27.004,80 |
| 2 | 1,2174 | 73.044,00 | 24.348,00 | 3.895,68 | 28.243,68 |
| 3 | 1,2974 | 51.896,00 | 25.948,00 | 3.113,76 | 29.061,76 |
| 4 | 1,3881 | 27.762,00 | 27.762,00 | 2.220,96 | 29.982,96 |
| 5 | 1,4640 | – | 29.280,00 | 1.171,20 | 30.451,20 |
| Total | – | – | 129.842,00 | 14.902,40 | 144.744,40 |

Calculando-se a taxa de retorno associada ao fluxo das prestações, encontramos 13,43% ao semestre. Portanto, a taxa de juros nominal é de 28,66% ao ano. Logo, será preferível o financiamento do banco B que cobra apenas 20% a.a. de juros nominais.

b) A agência bancária do "Dog-Cat Bank Ltd", sediada em Idaho, USA, oferece à empresa brasileira Tavesa (Tartaruga Veloz S.A.) um empréstimo de US$ 9.000,00 à taxa de 12% a.a. e estabelece a amortização do principal em 3 parcelas anuais iguais.

O pagamento da amortização e dos juros devidos será feito em dólares, o que acarreta um encargo financeiro adicional que é o recolhimento junto ao Banco Central, de 25% dos juros a serem remetidos. Esta percentagem é a do Imposto de Renda sobre remessas de juros para o exterior.

O contrato será assinado em 31.12.72, vencendo a primeira amortização em 31.12.73. (Para considerações sobre a desvalorização cambial referir-se à tabela a seguir.)

Um banco brasileiro, o Difasa (Dinheiro Fácil S.A.), sabendo da oferta, visitou o cliente e propôs-lhe idêntica quantia à taxa nominal de 25% a.a.

Qual é a melhor alternativa?

*Resolução:*

O dólar para venda foi o seguinte:

| *Data* | *CR$/US$* |
|---|---|
| 31.12.73 | 6,220 |
| 31.12.74 | 7,435 |
| 31.12.75 | 9,070 |

A planilha, em dólares, foi montada levando-se em conta um imposto de remessa de 25% sobre juros, ou seja, como o "Dog-Cat" não tem nada a ver com isto, há um acréscimo de 1/3 do juro devido como I.R.:

| *Ano* | *Saldo Devedor* | *Amortização* | *Juros* | *Imposto de Renda* | *Prestação* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9.000,00 | – | – | – | – |
| 1 | 6.000,00 | 3.000,00 | 1.080,00 | 360,00 | 4.440,00 |
| 2 | 3.000,00 | 3.000,00 | 720,00 | 240,00 | 3.960,00 |
| 3 | – | 3.000,00 | 360,00 | 120,00 | 3.480,00 |
| Total | – | 9.000,00 | 2.160,00 | 720,00 | 11.880,00 |



Utilizando o valor do dólar *para venda*, podemos converter a prestação em cruzeiros:

| *Ano* | *Prestação* |
|---|---|
| 0 | – |
| 1 | 27.616,80 |
| 2 | 29.442,60 |
| 3 | 31.563,60 |

O valor emprestado, convertido em cruzeiros de *compra* em 31.12.72 (Cr$ 6,18/US$) dá Cr$ 55.620,00.

Logo, para calcularmos o custo deste empréstimo, basta encontrar a taxa $i$, tal que:

$$55.620,00 = 27.616,80(1 + i)^{-1} + 29.442,60(1 + i)^{-2} + 31.563,60(1 + i)^{-3}$$

Acha-se:

$i \cong 26,75\%$ a.a.

Dado o fato de que a taxa nominal ofertada pelo banco brasileiro é de 25% a.a., portanto inferior ao banco estrangeiro, conclui-se que a melhor alternativa é de tomar-se o empréstimo interno.

## 4. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcular a taxa nominal anual que deve cobrar uma financeira para que ganhe 8% a.a. de juros reais nas seguintes hipóteses de inflação:

a) 5% a.a.

b) 20% a.a.

c) 40% a.a.

*Resolução:*

A taxa nominal é obtida pela seguinte fórmula:

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$

onde:

$i$ = taxa de juros nominal

$j$ = taxa de inflação

$r$ = taxa de juros real

Lembrando-se de que as taxas devem referir-se ao mesmo período de tempo, temos:

a) $r = 8\%$ a.a.

$j = 5\%$ a.a.

$i = ?$

Então:

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$
$$(1 + i) = (1 + 0{,}05)(1 + 0{,}08)$$
$$(1 + i) = 1{,}134$$
$$\therefore i = 0{,}134 \quad \text{ou} \quad 13{,}4\% \text{ a.a.}$$

Portanto, se a inflação for de 5% a.a. e a financeira quiser ganhar 8% a.a. de juros reais, ela deverá cobrar a taxa nominal de 13,4% a.a. de seus clientes.

b) $r = 8\%$ a.a.

$j = 20\%$ a.a.

$i = ?$

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$
$$(1 + i) = (1 + 0{,}20)(1 + 0{,}08)$$
$$(1 + i) = 1{,}296$$
$$\therefore i = 0{,}296 \quad \text{ou} \quad 29{,}6\% \text{ a.a.}$$

c) $r = 8\%$ a.a.

$j = 40\%$ a.a.

$i = ?$

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$
$$(1 + i) = (1 + 0{,}40)(1 + 0{,}08)$$
$$(1 + i) = 1{,}512$$
$$\therefore i = 0{,}512 \quad \text{ou} \quad 51{,}2\% \text{ a.a.}$$

2. A taxa de juros para aplicações de curto e médio prazos, em um banco, é de 40% a.a. Que remuneração real recebe o cliente, se a inflação for de:

a) 30% a.a.

b) 38% a.a.

c) 45% a.a.



*Resolução:*

a) $i = 40\%$ a.a.

$j = 30\%$ a.a.

$r = ?$

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$
$$(1 + 0{,}40) = (1 + 0{,}30)(1 + r)$$
$$(1 + r) = \frac{1{,}40}{1{,}30} = 1{,}076923$$
$$\therefore r = 0{,}076923 \quad \text{ou} \quad r \cong 7{,}69\% \text{ a.a.}$$

b) $i = 40\%$ a.a.

$j = 38\%$ a.a.

$r = ?$

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$
$$(1 + 0{,}40) = (1 + 0{,}38)(1 + r)$$
$$(1 + r) = \frac{1{,}40}{1{,}38} = 1{,}014493$$
$$\therefore r = 0{,}014493 \quad \text{ou} \quad r \cong 1{,}45\% \text{ a.a.}$$

c) $i = 40\%$ a.a.

$j = 45\%$ a.a.

$r = ?$

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$
$$(1 + 0{,}40) = (1 + 0{,}45)(1 + r)$$
$$(1 + r) = \frac{1{,}40}{1{,}45} = 0{,}965517$$
$$r = 0{,}965517 - 1$$
$$\therefore r = -0{,}034483 \quad \text{ou} \quad r \cong -3{,}45\% \text{ a.a.}$$

Portanto, a taxa de juros neste caso é negativa, ou seja, estaria ocorrendo descapitalização no valor aplicado.

3. Que taxa de inflação anual deve ocorrer para que um aplicador ganhe 12% a.a. de juros reais, caso a taxa nominal seja de:

a) 25% a.a.

b) 35% a.a.

c) 45% a.a.

*Resolução:*

a) $i = 25\%$ a.a.

$r = 12\%$ a.a.

$j = ?$

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$

$$(1 + 0{,}25) = (1 + j)(1 + 0{,}12)$$

$$(1 + j) = \frac{1{,}25}{1{,}12} = 1{,}116071$$

$$\therefore j = 0{,}116071 \quad \text{ou} \quad j \cong 11{,}61\% \text{ a.a.}$$

b) $i = 35\%$ a.a.

$r = 12\%$ a.a.

$j = ?$

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$

$$(1 + 0{,}35) = (1 + j)(1 + 0{,}12)$$

$$(1 + j) = \frac{1{,}35}{1{,}12} = 1{,}205357$$

$$\therefore j = 0{,}205357 \quad \text{ou} \quad j \cong 20{,}54\% \text{ a.a.}$$

c) $i = 45\%$ a.a.

$r = 12\%$ a.a.

$j = ?$

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$

$$(1 + 0{,}45) = (1 + j)(1 + 0{,}12)$$

$$(1 + j) = \frac{1{,}45}{1{,}12} = 1{,}294643$$

$$\therefore j = 0{,}294643 \quad \text{ou} \quad j \cong 29{,}46\% \text{ a.a.}$$

4. Por um capital de Cr$ 6.000,00 aplicado por 2 anos, o investidor recebeu Cr$ 5.179,35 de juros. Qual é a taxa de juros real ganha, se a inflação for de 30% a.a.?

*Resolução:*

$C_0 = 6.000{,}00$

$J = 5.179{,}35$



$n = 2$ anos

$i = ?$

A taxa de juros nominal ($i$) será:

$$J = C_0[(1 + i)^n - 1]$$

$$5.179{,}35 = 6.000[(1 + i)^2 - 1]$$

$$\frac{5.179{,}35}{6.000} + 1 = (1 + i)^2$$

$$1{,}863225 = (1 + i)^2$$

$$(1{,}863225)^{1/2} = (1 + i)$$

$$1{,}365 = (1 + i)$$

$$\therefore i = 0{,}365 \quad \text{ou} \quad i = 36{,}5\% \text{ a.a.}$$

A taxa de juros real ($r$), numa inflação de 30% a.a., será:

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$

$$(1 + 0{,}365) = (1 + 0{,}30)(1 + r)$$

$$(1 + r) = \frac{1{,}365}{1{,}30} = 1{,}05$$

$$\therefore r = 0{,}05 \quad \text{ou} \quad r = 5\% \text{ a.a.}$$

Outro método de solução é considerar que:

Se

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$

então

$$(1 + i)^2 = [(1 + j)(1 + r)]^2$$

portanto,

$$(1 + i)^2 = (1 + j)^2(1 + r)^2$$

No problema temos que:

$$(1 + i)^2 = 1{,}863225$$

e

$$(1 + j) = 1{,}30$$

Por conseguinte, podemos escrever a igualdade:

$$1{,}863225 = (1{,}30)^2(1 + r)^2$$

$$(1 + r)^2 = \frac{1{,}863225}{1{,}69} = 1{,}1025$$

$$1 + r = (1{,}1025)^{1/2}$$

$$\therefore\ r = 0{,}05 \quad \text{ou} \quad r = 5\%\ \text{a.a.}$$

5. Uma pessoa aplica Cr$ 10.000,00 em uma instituição financeira que paga 7% a.a. mais correção monetária. Que montante receberá o investidor após 3 anos, se a correção anual for de 25% a.a.?

*Resolução:*

Calculando a taxa nominal anual, teremos:

$r = 7\%$ a.a. (taxa de juros real)

$j = 25\%$ a.a. (taxa de inflação)

$i = ?$

$$(1 + i) = (1{,}25)(1{,}07)$$

$$(1 + i) = 1{,}3375$$

$$\therefore\ i = 0{,}3375 \quad \text{ou} \quad i = 33{,}75\%\ \text{a.a.}$$

Portanto,

$C_0 = 10.000{,}00$

$i = 33{,}75\%$ a.a.

$n = 3$ anos

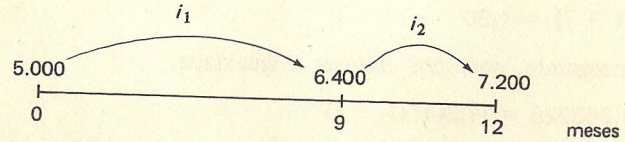
$$C_3 = 10.000(1{,}3375)^3$$

$$C_3 = 10.000(2{,}392662)$$

$C_3 = $ Cr$ 23.926,62, o montante que receberá o investidor.

6. João investiu Cr$ 5.000,00 em títulos de um banco pelo prazo de 1 ano, tendo sido fixado o valor de resgate em Cr$ 7.200,00 quando do vencimento da aplicação. Entretanto, necessitando de dinheiro, descontou os títulos 3 meses antes do vencimento, recebendo a quantia líquida de Cr$ 6.400,00. Que taxa real João recebeu e que taxa nominal foi cobrada na operação de desconto, se a inflação nos primeiros nove meses tiver sido de 2,5% a.m.?

*Resolução:*






$i_1$ = taxa de juros nominal recebida pelo cliente

$i_2$ = taxa de juros nominal cobrada no desconto

*Taxa recebida pelo cliente:*

$C_0 = 5.000$

$C_9 = 6.400$

$n = 9$ meses (período em que o capital ficou aplicado)

$i_1 = ?$

$j = 2{,}5\%$ a.m.

$$6.400 = 5.000(1 + i_1)^9$$

$$(1 + i_1)^9 = \frac{6.400}{5.000} = 1{,}28$$

Como

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$

então:

$$(1 + i_1)^9 = (1 + j)^9 (1 + r)^9$$

$$1{,}28 = (1{,}025)^9 (1 + r)^9$$

$$(1 + r)^9 = \frac{1{,}28}{1{,}248863} = 1{,}024932$$

Concluímos que o cliente ganhou, em termos reais, apenas 2,49% em 9 meses. Se quisermos calcular a taxa anual equivalente, faremos:

$$(1 + r)^9 = 1{,}024932$$

$$1 + r = (1{,}024932)^{1/9}$$

$$1 + r = 1{,}002740$$

$$\therefore\ r = 0{,}00274 \quad \text{ou} \quad r = 0{,}274\%\ \text{a.m.}$$

Em termos anuais, teremos:

$$1 + r' = (1{,}002740)^{12}$$

$$1 + r' = 1{,}033380$$

$$\therefore\ r' = 0{,}03338 \quad \text{ou} \quad r' \cong 3{,}34\%\ \text{a.a.}$$

O cálculo direto será feito por:

$$1 + r' = [(1 + r)^{1/9}]^{12}$$

$$1 + r' = (1 + r)^{12/9}$$

$$1 + r' = (1{,}024932)^{12/9}$$

$$1 + r' = (1{,}024932)^{1{,}333333}$$

$$1 + r' = 1{,}033380$$

$$\therefore\ r' = 0{,}03338 \quad \text{ou} \quad r' \cong 3{,}34\%\ \text{a.a.}$$

*Taxa nominal cobrada no desconto:*

$C_0 = 6.400$

$C_3 = 7.200$

$n$ = 1 trimestre (período de antecipação)

$i_2$ = ?

$$7.200 = 6.400(1 + i_2)^1$$

$$(1 + i_2)^1 = \frac{7.200}{6.400} = 1{,}125$$

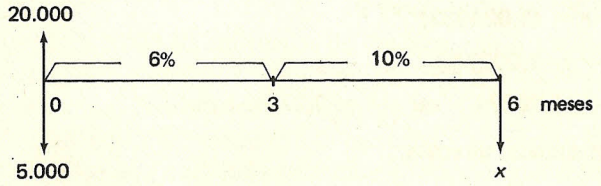
Em termos anuais, vem:

$$1 + i = (1{,}125)^4 = 1{,}601807$$

$$\therefore\ i = 0{,}601807 \quad \text{ou} \quad i \cong 60{,}18\%\ \text{a.a.}$$

7. O preço a vista de um carro é de Cr$ 20.000,00. A agência o vende por Cr$ 5.000,00 de entrada e o restante após 6 meses, a juros efetivos de 12% a.a. mais a correção monetária. Sabendo-se que a correção do primeiro trimestre do financiamento foi de 6% e a do segundo trimestre foi de 10%, pergunta-se qual é o valor a ser pago ao fim dos seis meses.

*Resolução:*




O valor financiado ($C_0$) é igual a:

$C_0 = 20.000 - 5.000 = 15.000$

$r$ = 12% a.a.

$j$ = correção do semestre



$$(1 + j) = (1 + 0{,}06)(1 + 0{,}10)$$

$$(1 + j) = 1{,}166$$

$$\therefore\ j = 0{,}166 \quad \text{ou} \quad j = 16{,}6\%\ \text{a.s.}$$

A taxa nominal referente ao semestre será:

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$

$$(1 + i) = (1 + 0{,}166)(1{,}12)^{1/2}$$

$$(1 + i) = (1{,}166)(1{,}058301) = 1{,}233978$$

$$\therefore\ i = 0{,}233978 \quad \text{ou} \quad i \cong 23{,}40\%\ \text{a.s.}$$

Portanto, o saldo a pagar deverá ser:

$$x = 15.000(1{,}234) = \text{Cr\$ } 18.510{,}00$$

Como vemos, o cálculo do saldo devedor poderia ser feito diretamente:

$$x = 15.000(1{,}06)(1{,}10)(1{,}12)^{1/2}$$

$$x = 15.000(1{,}166)(1{,}058301) \cong \text{Cr\$ } 18.510{,}00$$

8. Uma pessoa comprou uma casa por Cr$ 80.000,00 e vendeu-a, após 1 ano, por Cr$ 120.000,00. De quanto deve ser a inflação mensal para que o investidor ganhe 10% a.a. como juros reais?

*Resolução:*

$C_n = 120.000$

$C_0 = 80.000$

$n$ = 1 ano

$i$ = ?

$$120.000 = 80.000(1 + i)$$

$$(1 + i) = \frac{120.000}{80.000} = 1{,}50$$

$$\therefore\ i = 0{,}50 \quad \text{ou} \quad i = 50\%\ \text{a.a.}$$

Portanto:

$i = 50\%$ a.a.

$r = 10\%$ a.a.

$j$ = ?

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$

$$(1 + 0{,}5) = (1 + j)(1 + 0{,}1)$$

$$(1 + j) = \frac{1{,}5}{1{,}1} = 1{,}363636$$

$\therefore\ j = 0{,}363636$ ou $j \cong 36{,}36\%$ a.a.

A taxa de inflação mensal ($j_m$) será:

$$1 + j_m = (1{,}363636)^{1/12}$$

$$1 + j_m = 1{,}026183$$

$\therefore\ j_m = 0{,}026183$ ou $j_m \cong 2{,}62\%$ a.m.

. Quanto deve ser aplicado em Caderneta de Poupança no dia 1º de janeiro de 1976 para que se tenha Cr$ 100.000,00 no dia 1º de janeiro de 1977? Considerar juros reais de 6% a.a. mais correção monetária, conforme hipóteses abaixo:

| Trimestres | – | Correção monetária |
|---|---|---|
| primeiro | – | 6,675% |
| segundo | – | 8,690% |
| terceiro | – | 8,000% |
| quarto | – | 7,000% |

*Resolução:*

$C_n = 100.000$

$n = 1$ ano

$i = ?$

$C_0 = ?$

$r = 6\%$ a.a.

A taxa nominal anual ($i$) será calculada por:

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$

onde: "$j$" é a correção monetária anual.

$$(1 + j) = (1 + j_1)(1 + j_2)(1 + j_3)(1 + j_4)$$

sendo:

$j_1$ = correção monetária do 1º trimestre

$j_2$ = correção monetária do 2º trimestre

$j_3$ = correção monetária do 3º trimestre

$j_4$ = correção monetária do 4º trimestre



Então:

$$(1 + j) = (1 + 0{,}06675)(1 + 0{,}0869)(1 + 0{,}08)(1 + 0{,}07)$$

$$1 + j = 1{,}339861$$

$\therefore\ j = 0{,}339861$ ou $j = 33{,}9861\%$ a.a.

Portanto:

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$

$$(1 + i) = (1{,}339861)(1{,}06)$$

$$(1 + i) = 1{,}420253$$

$\therefore\ i = 0{,}420253$ ou $i \cong 42{,}03\%$ a.a.

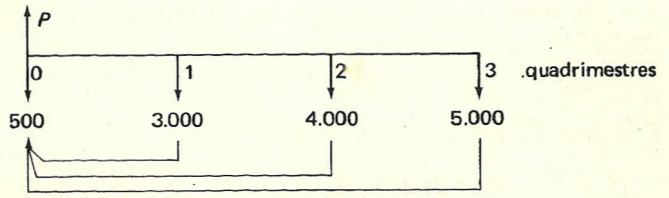
Calculando o capital inicial, vem:

$$100.000 = C_0(1{,}420253)$$

$$C_0 = \frac{100.000}{1{,}420253} = \text{Cr\$ } 70.410{,}00$$

10. Uma loja anuncia a venda de um conjunto de som por 3 parcelas quadrimestrais, seqüenciais de Cr$ 3.000,00, Cr$ 4.000,00 e Cr$ 5.000,00 mais uma entrada de Cr$ 500,00. Qual deve ser o preço a vista se a taxa de juros real for de 2% ao quadrimestre e a inflação prevista for de 8% no primeiro quadrimestre, 7% no segundo e de 6% no terceiro?

*Resolução:*




$$P = 500 + \frac{3.000}{(1 + i_1)} + \frac{4.000}{(1 + i_2)} + \frac{5.000}{(1 + i_3)}$$

$i_1$ = taxa nominal do 1º quadrimestre

$i_2$ = taxa nominal dos 2 quadrimestres

$i_3$ = taxa nominal dos 3 quadrimestres

Temos:

$$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$$

a) $(1 + i_1) = (1{,}08)(1{,}02) = 1{,}1016 \quad \therefore \quad i_1 = 0{,}1016$ ou

$i_1 = 10{,}16\%$

b) $(1 + i_2) = (1 + i_1)(1 + 0{,}07)(1 + 0{,}02)$

$(1 + i_2) = (1{,}1016)(1{,}0914) = 1{,}202286$

$\therefore \; i_2 = 0{,}202286$ ou $i_2 \cong 20{,}23\%$

c) $(1 + i_3) = (1 + i_2)(1 + 0{,}06)(1 + 0{,}02)$

$(1 + i_3) = (1{,}202286)(1{,}06)(1{,}02) = 1{,}299912$

$\therefore \; i_3 = 0{,}299912$ ou $i_3 \cong 29{,}99\%$

Portanto, o preço a vista (valor atual) do conjunto de som será igual a:

$$P = 500 + \frac{3.000}{1{,}1016} + \frac{4.000}{1{,}202286} + \frac{5.000}{1{,}299912}$$

$$P = 500{,}00 + 2.723{,}31 + 3.327{,}00 + 3.846{,}41$$

$$P = \text{Cr\$ } 10.396{,}72$$

11. Um carro é vendido por Cr$ 50.000,00 a vista ou em 24 prestações mensais, vencendo a primeira a um mês. Qual é o valor das prestações, se a taxa de juros real for de 10% a.a. e a inflação de 40% a.a.?

*Resolução:*

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$P = 50.000$

$n = 24$ meses

$i = ?$

$r = 10\%$ a.a.

$j = 40\%$ a.a.

$(1 + i) = (1 + j)(1 + r)$

$(1 + i) = (1{,}40)(1{,}10) = 1{,}54$

$\therefore \; i = 0{,}54$ ou $i = 54\%$ a.a.

Portanto, calculando-se a taxa nominal equivalente mensal será:

$$\sqrt[12]{1{,}54} = 1{,}036637$$

$\therefore \; i_m = 0{,}036637$ ou $i_m \cong 3{,}66\%$ a.m.

$$a_{\overline{24}|3{,}6637} = \frac{1 - (1{,}036637)^{-24}}{0{,}036637}$$



$a_{\overline{24}|3{,}6637} = 15{,}785770$

$$R = \frac{P}{a_{\overline{n}|i}} \Longrightarrow R = \frac{50.000}{15{,}78577} = \text{Cr\$ } 3.167{,}41$$

12. Para financiar a compra de equipamentos, a empresa Bom-Café Ltda. recebe um empréstimo no valor de 6.000 ORTN, contratando-se a taxa de 8% a.a. As amortizações serão efetuadas pelo Sistema de Amortização Constante (SAC) em 3 anos, vencendo as parcelas semestralmente. Construir a planilha do financiamento, considerando os valores expressos em ORTN.

*Resolução:*

a) *Amortização:*

prazo: 3 anos ou 6 semestres

principal: 6.000 ORTN

$$A_k = \frac{6.000}{6} = 1.000 \text{ ORTN's}$$

b) *Taxa de juros:*

$i = 8\%$ a.a. $\Longrightarrow i_s = 4\%$ a.s.

A planilha é construída conforme modelos já apresentados no Capítulo IX, sendo a única diferença o fato de que os valores se encontram expressos em ORTN's.

PLANILHA DE FINANCIAMENTO

Valores em ORTN

| *Sem.* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6.000 | 6.000 | – | – | – |
| 1 | – | 5.000 | 1.000 | 240 | 1.240 |
| 2 | – | 4.000 | 1.000 | 200 | 1.200 |
| 3 | – | 3.000 | 1.000 | 160 | 1.160 |
| 4 | – | 2.000 | 1.000 | 120 | 1.120 |
| 5 | – | 1.000 | 1.000 | 80 | 1.080 |
| 6 | – | – | 1.000 | 40 | 1.040 |
| Total | – | – | 6.000 | 840 | 6.840 |

Nota: O valor em cruzeiros da prestação será obtido pela conversão das ORTN's em cruzeiros.

13. Uma casa é vendida a vista por Cr$ 795.000,00 ou por Cr$ 300.000,00 de entrada, sendo o restante financiado em 60 meses. As amortizações serão efetuadas pelo Sistema Francês – Tabela Price – a juros de 12% a.a. Como existe o problema da inflação, o vendedor exige que as prestações sejam estabelecidas em termos de UPC (Unidade Padrão de Capital), devendo-se para tanto considerar o valor da UPC fixado em Cr$ 150,00 na data da venda. Construir planilha de prestações para o 1º ano, separando os juros da parte amortizada.

*Resolução:*

Entrada: Cr$ 300.000,00

Financiamento: Cr$ 495.000,00

Prazo total: 60 meses

Juros: 12% a.a. $\Longrightarrow$ 1% a.m.

1 UPC: Cr$ 150,00

O primeiro passo é transformar o valor do financiamento ($P_0$) em *UPC*:

$$P_0 = \frac{495.000,00}{150,00} = 3.300 \ UPC$$

$P_0 = 3.300 \ UPC$

$i = 1\%$ a.m.

$n = 60$ meses

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$3.300 = R \cdot a_{\overline{60}|1}$$

$$3.300 = R\,(44,955038)$$

$$R = \frac{3.300}{44,955038} = 73,4067 \ UPC$$

A planilha para o 1º ano será a apresentada na página seguinte.

Se quiséssemos saber o valor de juros e amortização em cruzeiros, bastaria multiplicar o valor em *UPC* por seu respectivo valor em cruzeiros. Assim, por exemplo, se o valor da *UPC* no 12º mês fosse de Cr$ 180,00, teríamos:

*Juros* = 28,3262 *UPC*

Amortização = 45,0805 *UPC*

1 *UPC* = Cr$ 180,00



Então:

*JUROS* = 28,3262 × 180,00 = Cr$ 5.098,72

*AMORTIZAÇÃO* = 45,0805 × 180,00 = Cr$ 8.114,49

PLANILHA DE FINANCIAMENTO

Valores em UPC

| *Meses* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3.300,0000 | 3.300,0000 | – | – | – |
| 1 | – | 3.259,5933 | 40,4067 | 33,0000 | 73,4067 |
| 2 | – | 3.218,7825 | 40,8108 | 32,5959 | 73,4067 |
| 3 | – | 3.177,5636 | 41,2189 | 32,1878 | 73,4067 |
| 4 | – | 3.135,9325 | 41,6311 | 31,7756 | 73,4067 |
| 5 | – | 3.093,8851 | 42,0474 | 31,3593 | 73,4067 |
| 6 | – | 3.051,4173 | 42,4678 | 30,9389 | 73,4067 |
| 7 | – | 3.008,5248 | 42,8925 | 30,5142 | 73,4067 |
| 8 | – | 2.965,2033 | 43,3215 | 30,0852 | 73,4067 |
| 9 | – | 2.921,4486 | 43,7547 | 29,6520 | 73,4067 |
| 10 | – | 2.877,2564 | 44,1922 | 29,2145 | 73,4067 |
| 11 | – | 2.832,6223 | 44,6341 | 28,7726 | 73,4067 |
| 12 | – | 2.787,5418 | 45,0805 | 28,3262 | 73,4067 |

14. Para implementar um projeto, a empresa Papel & Papelão Ltda. recebe de um banco de desenvolvimento o financiamento no valor de 20.000 ORTN. As condições do empréstimo são as seguintes:

a) Taxa de Juros: 7% a.a. (taxa efetiva)

b) Amortizações: 8 semestres

c) Carência: 1 ano

d) Sistema de Amortização: SAC.

O contrato de financiamento foi efetuado em 31.12.75, devendo, portanto, vencer a primeira amortização em 31.12.76. Calcular a taxa de juros nominal anual estimada, sob a hipótese de evolução das ORTN abaixo citada:

| DATA | – | 1 ORTN |
|---|---|---|
| 31.12.75 | – | Cr$ 130,00 |
| 30.06.76 | – | Cr$ 152,00 |
| 31.12.76 | – | Cr$ 182,00 |
| 30.06.77 | – | Cr$ 200,00 |
| 31.12.77 | – | Cr$ 220,00 |
| 30.06.78 | – | Cr$ 240,00 |
| 31.12.78 | – | Cr$ 262,00 |
| 30.06.79 | – | Cr$ 283,00 |
| 31.12.79 | – | Cr$ 305,00 |
| 30.06.80 | – | Cr$ 327,00 |

*Resolução:*

Para calcular a taxa nominal, deve-se construir a planilha a valores constantes, ou seja, em ORTN e depois efetuar a conversão das prestações em cruzeiros equivalentes da época em que vencem as prestações.

a) *Amortização:*

Prazo = 8 semestres

Principal = 20.000 ORTN

$$A_k = \frac{20.000}{8}$$

$$A_k = 2.500 \text{ ORTN}$$

b) *Taxa de juros:*

$i$ = 7% a.a. (taxa efetiva)

A taxa equivalente semestral será:

$$\sqrt{1,07} = 1,03441$$

$$\therefore\ i_s = 0,03441 \quad \text{ou} \quad i_s \cong 3,44\% \text{ a.s.}$$



PLANILHA DE FINANCIAMENTO

Valores em ORTN

| *Sem.* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 20.000,00 | 20.000,00 | – | – | – |
| 1 | – | 20.000,00 | – | 688,20 | 688,20 |
| 2 | – | 17.500,00 | 2.500,00 | 688,20 | 3.188,20 |
| 3 | – | 15.000,00 | 2.500,00 | 602,18 | 3.102,18 |
| 4 | – | 12.500,00 | 2.500,00 | 516,15 | 3.016,15 |
| 5 | – | 10.000,00 | 2.500,00 | 430,13 | 2.930,13 |
| 6 | – | 7.500,00 | 2.500,00 | 344,10 | 2.844,10 |
| 7 | – | 5.000,00 | 2.500,00 | 258,08 | 2.758,08 |
| 8 | – | 2.500,00 | 2.500,00 | 172,05 | 2.672,05 |
| 9 | – | – | 2.500,00 | 86,03 | 2.586,03 |
| Total | – | – | 20.000,00 | 3.785,12 | 23.785,12 |

Considerando que a *data 0* corresponde a 31.12.75, podemos apresentar o quadro de conversão em cruzeiros da data, do seguinte modo:

Valores em Cruzeiros

| *Data* | *Prestação em ORTN's* | *Valor da ORTN* | *Prestação em cruzeiros* |
|---|---|---|---|
| 31.12.75 | – | – | – |
| 30.06.76 | 688,20 | 152,00 | 104.606,40 |
| 31.12.76 | 3.188,20 | 182,00 | 580.252,40 |
| 30.06.77 | 3.102,18 | 200,00 | 620.436,00 |
| 31.12.77 | 3.016,15 | 220,00 | 663.553,00 |
| 30.06.78 | 2.930,13 | 240,00 | 703.231,20 |
| 31.12.78 | 2.844,10 | 262,00 | 745.154,20 |
| 30.06.79 | 2.758,08 | 283,00 | 780.536,64 |
| 31.12.79 | 2.672,05 | 305,00 | 814.975,25 |
| 30.06.80 | 2.586,03 | 327,00 | 845.631,81 |
| Total | 23.785,12 | – | 5.858.376,90 |

A taxa de juros nominal será calculada mediante consideração do fluxo de caixa, resultante do valor recebido e das prestações pagas. A taxa de retorno do fluxo de caixa será a taxa nominal.

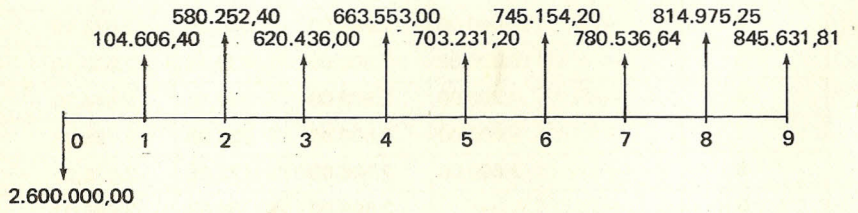
O valor emprestado pelo banco é de:

Financiamento: 20.000 ORTN

1 ORTN: Cr$ 130,00 (porque o financiamento foi concedido em 31/12/75).

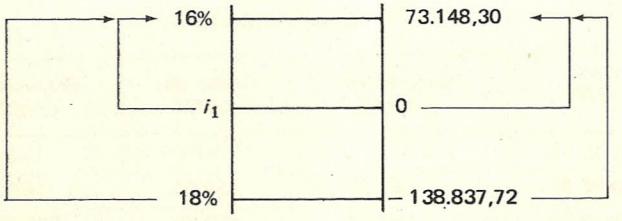
Valor: 20.000 × 130,00 = Cr$ 2.600.000,00

Portanto, o fluxo de caixa do banco será:




Sendo a taxa de retorno do fluxo de caixa a taxa nominal, devemos calculá-la utilizando-se para tanto o método de tentativa e erro já explicado no Capítulo IX.

O valor atual à taxa de 16% a.s. é de Cr$ 73.148,30 e à taxa de 18% a.s. é de Cr$ 138.837,72. Interpolando, teremos:




A taxa interpolada $i_1$ é igual a 16,69% a.s.

Na segunda interpolação, obteremos:

$$i = 16{,}66\% \text{ a.s.}$$

Sendo a taxa nominal de juros 16,66% a.s., a taxa anual será:

$$(1{,}1666)^2 = 1{,}36096$$

$$\therefore\ i = 0{,}36096 \quad \text{ou} \quad i \cong 36{,}10\% \text{ a.a.}$$



Por conseguinte, considerando-se juros reais de 7% a.a. e a hipótese de correção monetária apresentada, a taxa nominal anual de juros cobrada pelo banco é de 36,10% a.a.

15. Um banco americano concede a um cliente brasileiro o empréstimo de US$ 1.800.000,00 à taxa de 14% a.a. A devolução do principal será feita em 3 parcelas anuais iguais (SAC). Uma vez que o pagamento do principal e dos juros será feito em dólares, considerar o Imposto de Renda de 25% sobre os juros brutos a serem remetidos.

Qual é a taxa de juros nominal efetiva do empréstimo, se ocorrer a seguinte desvalorização cambial (data do empréstimo = 0):

| PERÍODO | | 1 US$ |
|---|---|---|
| 0 | – | Cr$ 12,00 |
| 1 | – | Cr$ 14,40 |
| 2 | – | Cr$ 18,00 |
| 3 | – | Cr$ 22,50 |

*Resolução:*

Elaboramos inicialmente a planilha em valores constantes, ou seja, em dólares, considerando posteriormente o efeito da desvalorização cambial.

a) *Amortização:*

Prazo: 3 anos

Principal: US$ 1.800.000,00

$$A_k = \frac{1.800.000}{3} = \text{US\$ } 600.000{,}00$$

b) *Taxa de Juros:*

$i$ = 14% a.a.

c) *Imposto de Renda:*

Como o banco americano deve receber os juros totais que lhe são devidos, então a retenção de 25% como Imposto de Renda implica que consideremos um acréscimo de 1/3 sobre os juros devidos.

*Exemplo:* para remeter US$ 75,00 para o exterior levando em conta a taxação de 25%, devemos recolher US$ 100,00 pois:

Imposto de Renda = 100 × 0,25 = US$ 25,00

Valor a ser Remetido = 100 – 25 = US$ 75,00

Portanto, houve um acréscimo de US$ 25,00, ou seja:

$$\frac{25}{75} = \frac{1}{3} \Longrightarrow 75 \cdot \frac{1}{3} = \text{US\$ } 25{,}00$$

PLANILHA DE FINANCIAMENTO

Valores em Dólares

| *Ano* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Imposto de Renda* ($I_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k + I_k$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.800.000 | 1.800.000 | – | – | – | – |
| 1 | – | 1.200.000 | 600.000 | 252.000 | 84.000 | 936.000 |
| 2 | – | 600.000 | 600.000 | 168.000 | 56.000 | 824.000 |
| 3 | – | – | 600.000 | 84.000 | 28.000 | 712.000 |
| Total | – | – | 1.800.000 | 504.000 | 168.000 | 2.472.000 |

Calculando-se as prestações em cruzeiros, teremos:

Valores em Cruzeiros

| *Ano* ($k$) | *Prestação em Dólares* | *Valor do Dólar* | *Prestação em Cruzeiros* |
|---|---|---|---|
| 0 | – | 12,00 | – |
| 1 | 936.000 | 14,40 | 13.478.400 |
| 2 | 824.000 | 18,00 | 14.832.000 |
| 3 | 712.000 | 22,50 | 16.020.000 |
| Total | 2.472.000 | – | 44.330.400 |

A taxa nominal será obtida calculando-se a taxa de retorno do fluxo de caixa da operação:

Valor emprestado: US$ 1.800.000,00

1 US$ : Cr$ 12,00

Valor em cruzeiros: 1.800.000 × 12 = Cr$ 21.600.000,00

Por conseguinte, a taxa nominal ($i$) será tal que:

$$(21.600.000) + \frac{13.478.400}{(1+i)} + \frac{14.832.000}{(1+i)^2} + \frac{16.020.000}{(1+i)^3} = 0$$



Resolvendo, por tentativa e erro, teremos:

$i \cong 45{,}02\%$ a.a.

Sendo esta a taxa nominal efetiva do empréstimo.

16. Uma empresa, procurando o financiamento de Cr$ 50.000.000,00, recebe duas propostas de financiamento que, classificadas como A e B, foram entregues a um consultor para que este indicasse qual seria a melhor. As propostas são as seguintes:

*Proposta A:* Banco da Inglaterra

Financiamento: US$ 4.000.000,00 (1 US$ = Cr$ 12,50)

Prazo total: 2 anos

Amortizações: Sistema Americano

Juros: Taxa intercambiária de Londres vigente na data do vencimento dos juros. Os juros serão pagos semestralmente.

Imposto de Renda: 25% sobre os juros brutos a serem remetidos.

*Proposta B:* Banco Industrial do Brasil

Financiamento: Cr$ 50.000.000,00

Juros: Taxa nominal efetiva de 30,0% a.a.

Considerando a data atual como sendo o semestre 0, teríamos as previsões de taxa interbancária e de desvalorização cambial abaixo citadas:

| *Semestres* | *Taxa Interbancária* | *1 US$* |
|---|---|---|
| 0 | – | Cr$ 12,50 |
| 1 | 9,75% a.a. | Cr$ 13,75 |
| 2 | 10,50% a.a. | Cr$ 15,20 |
| 3 | 8,0 % a.a. | Cr$ 16,60 |
| 4 | 7,50% a.a. | Cr$ 18,00 |

Determinar qual é a melhor proposta.

*Resolução:*

Devemos calcular qual é a taxa nominal efetiva do empréstimo externo, pois a taxa oferecida pelo banco brasileiro está expressa nestes termos.

*Financiamento Externo:*

*Taxa de Juros:* A taxa de juros será variável, conforme tabela de previsão

apresentada, sendo que a taxa ao semestre será calculada proporcionalmente. Assim, teremos:

| PERÍODO | – | TAXA PROPORCIONAL |
|---|---|---|
| 0 | | – |
| 1 | | 4,875% a.s. |
| 2 | | 5,250% a.s. |
| 3 | | 4,000% a.s. |
| 4 | | 3,750% a.s. |

*Amortização:* Sistema Americano

*Financiamento:* US$ 4.000.000,00

PLANILHA DE FINANCIAMENTO

Valores em Dólares

| *Sem.* ($k$) | *Saque* | *Saldo Devedor* ($Sd_k$) | *Amortização* ($A_k$) | *Juros* ($J_k$) | *Imposto de Renda* ($I_k$) | *Prestação* ($A_k + J_k + I_k$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4.000.000 | 4.000.000 | – | – | – | – |
| 1 | – | 4.000.000 | – | 195.000 | 65.000 | 260.000 |
| 2 | – | 4.000.000 | – | 210.000 | 70.000 | 280.000 |
| 3 | – | 4.000.000 | – | 160.000 | 53.333 | 213.333 |
| 4 | – | – | 4.000.000 | 150.000 | 50.000 | 4.200.000 |
| Total | – | – | 4.000.000 | 715.000 | 238.333 | 4.953.333 |

Valores em Cruzeiros

| *Sem.* ($k$) | *Prestação em Dólares* | *Valor do Dólar* | *Prestação em Cruzeiros* |
|---|---|---|---|
| 0 | – | 12,50 | – |
| 1 | 260.000 | 13,75 | 3.575.000 |
| 2 | 280.000 | 15,20 | 4.256.000 |
| 3 | 213.333 | 16,60 | 3.541.328 |
| 4 | 4.200.000 | 18,00 | 75.600.000 |
| Total | 4.953.333 | – | 86.972.328 |



A empresa pede emprestado US$ 4.000.000,00, ou seja Cr$ 50.000.000,00, sendo obrigada a pagar pelo financiamento as prestações acima apresentadas, na hipótese de que ocorram as taxas de juros e desvalorização cambial previstas.

Calculando-se a taxa de retorno do fluxo de caixa, vem:

$$(50.000.000) + \frac{3.575.000}{(1+i)} + \frac{4.256.000}{(1+i)^2} + \frac{3.541.328}{(1+i)^3} + \frac{75.600.000}{(1+i)^4} = 0$$

onde:

$i \cong 16{,}17\%$ a.s.

A taxa de retorno refere-se ao semestre porque os fluxos de caixa são semestrais.

Por conseguinte, a taxa nominal efetiva anual do empréstimo externo será:

$$(1{,}1617)^2 = 1{,}349547$$

$$\therefore\ i \cong 0{,}3495 \quad \text{ou} \quad i \cong 34{,}95\% \text{ a.a.}$$

Nessas condições é melhor alternativa optar pela Proposta B, ou seja, a proposta do Banco Industrial do Brasil, visto que este pede a taxa nominal efetiva de 30% a.a. A taxa nominal exigida pelo banco brasileiro é menor que a taxa nominal do empréstimo no exterior (Proposta A).

## 5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Qual deve ser a taxa nominal anual de uma financeira que deseja ganhar 6% a.a. de juros reais, caso a taxa de inflação seja de:
   a) 15% a.a.
   b) 20% a.a.
   c) 25% a.a.
   d) 30% a.a.

2. A taxa nominal vigorante no mercado é de 34% a.a. Nessas condições, qual é a taxa de juros real se a taxa de inflação for de·
   a) 20% a.a.
   b) 25% a.a.
   c) 30% a.a.
   d) 35% a.a.

3. Uma aplicação de Cr$ 5.000,00 rendeu juros de Cr$ 1.500,00 no prazo de 1 ano. Sabendo-se que neste período a taxa de inflação foi de 25%, pergunta-se qual foi a taxa de juro real obtida pelo aplicador?

4. João aplica Cr$ 500,00 em uma Caderneta de Poupança e após 4 anos verifica que possui o montante de Cr$ 1.660,75. Qual foi a taxa de correção monetária anual, uma vez que a Caderneta de Poupança rende juros reais de 6% a.a.?

5. Um terreno é posto a venda por Cr$ 50.000,00 a vista ou por Cr$ 57.500,00 a prazo, sendo que no segundo caso o comprador deverá dar Cr$ 20.000,00 de entrada e o restante em 1 ano. Se a taxa de inflação prevista for de 25% a.a., qual será a taxa de juros real recebida pelo vendedor?

6. O preço a vista de um carro é de Cr$ 20.000,00. Caso um comprador ofereça 50% como entrada e o restante após 6 meses, de quanto deve ser esta segunda parcela, se o vendedor quiser 7% a.a. de juros reais? Considerar uma inflação prevista de:

   a) 30% a.a.

   b) 36% a.a.

7. Uma pessoa investe Cr$ 15.000,00 na compra de um título cujo valor nominal, em seu vencimento, é de Cr$ 21.000,00. Após 6 meses da compra, o investidor constata que a inflação já alcança o índice de 20% para este período, o que o leva a desfazer-se do título, vendendo-o por Cr$ 19.047,62. Que juros reais ganhou o vendedor? Para que o comprador ao resgatar o título em seu vencimento (6 meses após) ganhe a taxa de juros reais de 10% a.a., de quanto deve ser a inflação nos próximos 6 meses da compra?

8. Uma financeira oferece, em negócios, a taxa nominal de 38% a.a. nas aplicações a prazo fixo. Em que circunstâncias é melhor aplicar em Caderneta de Poupança, onde temos juros reais de 6% a.a. mais correção monetária?

9. A loja Beta S.A. vende um conjunto de som no valor de Cr$ 25.000,00 a vista, a prazo com pagamento a 1 ano. Como opção de financiamento vende em duas parcelas, sendo a primeira no valor de Cr$ 10.000,00 a 6 meses e a segunda a 12 meses. Sabendo-se que a inflação prevista para este período será de 1,5% a.m. e que a loja quer ganhar 10% a.a. de juros reais, pergunta-se:

   a) qual é o valor pago na hipótese de apenas um pagamento a 12 meses?

   b) qual é o valor da segunda parcela, na hipótese de pagamento intermediário?

10. Se a inflação prevista para um ano for de 6% no primeiro quadrimestre, 7% no segundo e 8% no terceiro e se os juros reais forem de 2% a.q., qual será a taxa nominal para:

    a) primeiro quadrimestre;

    b) primeiros oito meses;

    c) os doze meses.

    Considerando os dados acima:

    d) qual é a taxa nominal equivalente mensal para os doze meses?



11. Um terreno é posto a venda por Cr$ 100.000,00 a vista. Qual é a prestação mensal para a venda financiada em 24 prestações, se o proprietário quer juros reais de 9% a.a. e se a inflação prevista for de 20% a.a.?

12. A taxa de juros reais do mercado é de 10% a.a. Nestas condições, uma empresa calcula seus coeficientes de financiamento para 12 prestações mensais, levando em conta a taxa de inflação. Quais serão os coeficientes para 12 meses, caso a inflação seja de:

    a) 15% a.a.

    b) 20% a.a.

    c) 25% a.a.

    d) 30% a.a.

13. Um barco cujo valor a vista é de Cr$ 91.942,71 foi vendido em 4 parcelas trimestrais, vencendo a primeira em 3 meses. Cronologicamente, as parcelas são de: Cr$ 20.000,00, Cr$ 20.000,00, Cr$ 35.000,00 e Cr$ 35.000,00. Qual será a taxa anual de juros reais auferida pelo vendedor, se a inflação for de 25% a.a.?

14. Certa loja vende uma aparelhagem de som por Cr$ 20.000,00 a vista. Caso o cliente deseje comprar a prazo, deverá dar uma entrada de Cr$ 4.000,00 e pagar 24 prestações mensais de Cr$ 996,37. Sabendo-se que a taxa de inflação é de 35% a.a., pergunta-se qual é a taxa de juros real cobrada neste financiamento?

15. Uma pessoa tomou emprestado Cr$ 1.200,00, comprometendo-se a restituir Cr$ 1.440,00 após 6 meses. Qual será a taxa anual de juros real cobrada, se a inflação for de 50% a.a.?

16. O Banco São Tomé S.A. concede um financiamento de 400.000,00 ORTN a juros de 8% a.a. O prazo total do financiamento, com carência de 2 anos, será de 6 anos. As amortizações serão feitas pelo SAC, tendo vencimento anual e os juros serão calculados sobre o saldo devedor, vencendo semestralmente. Construir a planilha de financiamento (os valores estarão expressos em ORTN).

17. Tendo concedido um financiamento de 200.000 ORTN, o órgão financiador determinou que os saques fossem processados à medida que os equipamentos a serem financiados fossem entregues. Os encargos financeiros foram contratados na base de juros efetivos reais de 6% a.a. mais correção monetária. O prazo total do financiamento será de 11 semestres, incluindo carência de 2 anos a contar do primeiro saque. As amortizações (SAC) e juros serão semestrais. Calcular a taxa de juros nominal do empréstimo, considerando a variação ocorrida no valor das ORTN e o cronograma de saques abaixo:

| *Data* | *Saques em ORTN* | *Valor da ORTN* |
|---|---|---|
| 30.03.70 | 50.000 | Cr$ 44,17 |
| 30.09.70 | 100.000 | Cr$ 47,05 |
| 30.03.71 | 50.000 | Cr$ 52,12 |
| 30.09.71 | – | Cr$ 57,36 |
| 30.03.72 | – | Cr$ 63,09 |
| 30.09.72 | – | Cr$ 68,46 |

Continuação

| *Data* | *Saques em ORTN* | *Valor da ORTN* |
|---|---|---|
| 30.03.73 | – | Cr$ 72,32 |
| 30.09.73 | – | Cr$ 77,12 |
| 30.03.74 | – | Cr$ 82,69 |
| 30.09.74 | – | Cr$ 98,22 |
| 30.03.75 | – | Cr$ 110,18 |
| 30.09.75 | – | Cr$ 123,20 |

18. Na compra de um apartamento pelo sistema financeiro habitacional, financiaram-se 900 UPC. A taxa de juros contratada foi de 12% a.a. e o prazo de amortização, de 5 anos. Considerando-se o sistema de amortizações constantes (SAC), calcular a planilha para as 12 primeiras prestações mensais (em UPC). Calcular o valor das prestações em cruzeiros, caso o valor da UPC neste primeiro ano seja:

    Cr$ 106,76: do 1º ao 3º mês

    Cr$ 112,25: do 4º ao 6º mês

    Cr$ 119,27: do 7º ao 9º mês

    Cr$ 125,70: do 10º ao 12º mês

19. O gerente financeiro de uma empresa necessitando de um empréstimo de Cr$ 1.000.000,00 consultou bancos nacionais e estrangeiros. A finalidade da consulta era obter o financiamento mais barato possível. Após certo tempo, recebeu (em 31.12.74) as seguintes propostas:

    a) Banco Little Boat Ltd. (USA)

    Juro: 10% a.a.

    Amortização: 2 parcelas anuais iguais.

    Obs.: Os juros serão pagos junto com as amortizações, sendo os pagamentos efetuados em dólares.

    b) Banco Samba S.A. (Brasil)

    Juro: 8% a.a + Correção Monetária

    Amortização: 2 parcelas anuais iguais.

    c) Banco Topa-Tudo S.A. (Brasil)

    Juro: 22% a.a. sem Correção Monetária

    Amortização: 2 parcelas anuais iguais.

    Qual é a melhor alternativa de financiamento, se considerarmos as informações do Setor de Estudos Estratégicos da empresa, segundo as quais as variações na correção monetária e na desvalorização cambial comportar-se-ão conforme quadro abaixo:

| *Data* | *Valor do Dólar* | *Valor da ORTN* |
|---|---|---|
| 31.12.74 | Cr$ 10,00 | Cr$ 50,00 |
| 31.12.75 | Cr$ 11,00 | Cr$ 56,40 |
| 31.12.76 | Cr$ 12,00 | Cr$ 62,50 |



## Respostas

1. a) 21,90% a.a.
   b) 27,20% a.a.
   c) 32,50% a.a.
   d) 37,80% a.a.

2. a) 11,67% a.a.
   b) 7,20% a.a.
   c) 3,08% a.a.
   d) – 0,74% a.a.

3. 4% a.a.

4. 27,36% a.a.

5. 0% a.a.

6. a) Cr$ 11.794,07
   b) Cr$ 12.063,17

7. 11,98% a.a. = juros reais ganhos pelo vendedor.
   5,12% a.s. = taxa de inflação nos próximos 6 meses, para que seja possível ao comprador ganhar juros reais de 10% a.a.

8. A aplicação em Caderneta de Poupança é melhor à medida que a correção monetária for superior a 30,19% a.a.

9. a) Cr$ 32.879,50
   b) Cr$ 21.411,37

10. a) 8,12% a.q.
    b) 18,00% em oito meses.
    c) 29,99% a.a.
    d) 2,21% a.m.

11. Cr$ 5.445,76

12. a) 0,094433
    b) 0,096548
    c) 0,098608
    d) 0,100615

13. 4% a.a.

14. 11,93% a.a.

15. – 4% a.a.

16. Valores em ORTN:

| *Semestres* | *Saldo Devedor* | *Juros* (1) | *Amortização* (2) | *Prestação* (1) + (2) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 400.000 | – | – | – |
| 1 | 400.000 | 16.000 | – | 16.000 |
| 2 | 400.000 | 16.000 | – | 16.000 |
| 3 | 400.000 | 16.000 | – | 16.000 |
| 4 | 320.000 | 16.000 | 80.000 | 96.000 |
| 5 | 320.000 | 12.800 | – | 12.800 |
| 6 | 240.000 | 12.800 | 80.000 | 92.800 |
| 7 | 240.000 | 9.600 | – | 9.600 |
| 8 | 160.000 | 9.600 | 80.000 | 89.600 |
| 9 | 160.000 | 6.400 | – | 6.400 |
| 10 | 80.000 | 6.400 | 80.000 | 86.400 |
| 11 | 80.000 | 3.200 | – | 3.200 |
| 12 | – | 3.200 | 80.000 | 83.200 |
| Total | – | 128.000 | 400.000 | 528.000 |

| | Valores em ORTN | | | | Valores em Cr$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Datas | Saldo Devedor | Juros* (1) | Amortização (2) | Prestação (1) + (2) | ORTN | Saques | Prestação |
| 03.70 | 50.000,00 | – | – | – | 44,17 | 2.208.500,00 | – |
| 09.70 | 150.000,00 | 1.478,15 | – | 1.478,15 | 47,05 | 4.705.000,00 | 69.546,96 |
| 03.71 | 200.000,00 | 4.434,45 | – | 4.434,45 | 52,12 | 2.606.000,00 | 231.123,53 |
| 09.71 | 200.000,00 | 5.912,60 | – | 5.912,60 | 57,36 | – | 339.146,74 |
| 03.72 | 175.000,00 | 5.912,60 | 25.000,00 | 30.912,60 | 63,09 | – | 1.950.275,93 |
| 09.72 | 150.000,00 | 5.173,53 | 25.000,00 | 30.173,53 | 68,46 | – | 2.065.679,86 |
| 03.73 | 125.000,00 | 4.434,45 | 25.000,00 | 29.434,45 | 72,32 | – | 2.128.699,42 |
| 09.73 | 100.000,00 | 3.695,38 | 25.000,00 | 28.695,38 | 77,12 | – | 2.212.987,71 |
| 03.74 | 75.000,00 | 2.956,30 | 25.000,00 | 27.956,30 | 82,69 | – | 2.311.706,45 |
| 09.74 | 50.000,00 | 2.217,23 | 25.000,00 | 27.217,23 | 98,22 | – | 2.673.276,33 |
| 03.75 | 25.000,00 | 1.478,15 | 25.000,00 | 26.478,15 | 110,18 | – | 2.917.362,57 |
| 09.75 | – | 739,08 | 25.000,00 | 25.739,08 | 123,20 | – | 3.171.054,66 |

* Juros efetivos de 2,9563% a.s.

Resposta: Taxa nominal de juros do empréstimo: 12,52% a.s.

18.

| | Valores em UPC | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mês | Saldo Devedor | Juros (1) | Amortização (2) | Prestação (1) + (2) | Prestação (em Cr$) |
| 0 | 900,00 | – | – | – | – |
| 1 | 885,00 | 9,00 | 15,00 | 24,00 | 2.562,24 |
| 2 | 870,00 | 8,85 | 15,00 | 23,85 | 2.546,23 |
| 3 | 855,00 | 8,70 | 15,00 | 23,70 | 2.530,21 |
| 4 | 840,00 | 8,55 | 15,00 | 23,55 | 2.643,49 |
| 5 | 825,00 | 8,40 | 15,00 | 23,40 | 2.626,65 |
| 6 | 810,00 | 8,25 | 15,00 | 23,25 | 2.609,81 |
| 7 | 795,00 | 8,10 | 15,00 | 23,10 | 2.755,14 |
| 8 | 780,00 | 7,95 | 15,00 | 22,95 | 2.737,25 |
| 9 | 765,00 | 7,80 | 15,00 | 22,80 | 2.719,36 |
| 10 | 750,00 | 7,65 | 15,00 | 22,65 | 2.847,11 |
| 11 | 735,00 | 7,50 | 15,00 | 22,50 | 2.828,25 |
| 12 | 720,00 | 7,35 | 15,00 | 22,35 | 2.809,40 |



19. a) Banco Little Boat Ltd.

| | Valores em Dólares | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ano | Saldo Devedor | Juros (1) | Amortização (2) | Prestação (1) + (2) | Prestação em Cr$ |
| 0 | 100.000,00 | – | – | – | – |
| 1 | 50.000,00 | 10.000,00 | 50.000,00 | 60.000,00 | 660.000,00 |
| 2 | – | 5.000,00 | 50.000,00 | 55.000,00 | 660.000,00 |

b) Banco Samba S/A

| | Valores em ORTN | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ano | Saldo Devedor | Juros (1) | Amortização (2) | Prestação (1) + (2) | Prestação em Cr$ |
| 0 | 20.000,00 | – | – | – | – |
| 1 | 10.000,00 | 1.600,00 | 10.000,00 | 11.600,00 | 654.240,00 |
| 2 | – | 800,00 | 10.000,00 | 10.800,00 | 675.000,00 |

Dentro das hipóteses assumidas, a melhor alternativa de financiamento é a do Banco Little Boat Ltd., pois apresenta o menor custo, 20,69% a.a.

O custo do Banco Samba S.A. é de 21,14% a.a. e o do Banco Topa-Tudo S.A. é de 22,00% a.a.

# Apêndice

## 1. COMPARAÇÃO ENTRE ALGUNS ÍNDICES

Na tabela abaixo listaram-se alguns indicadores de inflação, conforme aparecem publicados na Conjuntura Econômica:

| *Índice* | *Índice 2* | *Índice 12* | *Índice 74* | *Custo de Vida em São Paulo* |
|---|---|---|---|---|
| 1970 | 230 | 223 | 124 | 238 |
| 1971 | 277 | 271 | 154 | 288 |
| 1972 | 324 | 319 | 175 | 340 |
| 1973 | 373 | 368 | 209 | 392 |
| 1974 | 480 | 475 | 332 | 491 |

Os índices são os seguintes:

*Índice 2:* índice geral de preços – disponibilidade interna.

*Índice 12:* índice de preços por atacado – disponibilidade interna – geral.

**Nota:** este é o índice usado para o cálculo do valor da ORTN.

*Índice 74:* índice de preços por atacado – disponibilidade interna – papel e papelão.

*Custo de vida em São Paulo:* total.

Colocando-se todos os índices com base 100 em 1970, temos a tabela seguinte:

Esse

| *Ano* | *Índice 2* | *Índice 12* | *Índice 74* | *Custo de Vida em São Paulo* |
|---|---|---|---|---|
| 1970 | 100,00 | 100,00 | 100,00 | 100,00 |
| 1971 | 120,43 | 121,52 | 124,19 | 121,01 |
| 1972 | 140,87 | 143,05 | 141,13 | 142,86 |
| 1973 | 162,17 | 165,02 | 168,55 | 164,71 |
| 1974 | 208,70 | 213,00 | 267,74 | 206,30 |



Constatamos que, à exceção do índice 74, todos os índices apresentaram uma evolução semelhante, com pequenas diferenças.

Parte V

# TABELAS

## Tabelas de Contagem de Dias

Nas aplicações de curto prazo, ou seja, períodos inferiores a 1 ano, é usual a contagem de dias, entre a data da aplicação e a do resgate, ser exata. Para facilitar este trabalho, constroem-se tabelas de contagem, tais como a tabela apresentada na página seguinte.

*Exemplos:*

a) Quantos dias existem entre 21 de fevereiro de 1975 e 02 de outubro de 1975?

*Resolução:*

Entrando na tabela, temos que:

02.10.1975 = 275

21.02.1975 = 52

O número de dias, *considerando-se apenas uma das datas do intervalo*, será igual à diferença dos fatores:

275 − 52 = 223 dias

b) Qual é o número de dias compreendido entre 10 de fevereiro de 1976 e 20 de agosto de 1976?

*Resolução:*

Sabemos que este ano é bissexto, portanto o cálculo do número de dias será obtido por:

20.08.1976 = 232

10.02.1976 = 41

191



TABELA DE CONTAGEM DE DIAS DO ANO CIVIL

| Mês / Dia | Jan | Fev | Mar | Abr | Mai | Jun | Jul | Ago | Set | Out | Nov | Dez |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 32 | 60 | 91 | 121 | 152 | 182 | 213 | 244 | 274 | 305 | 335 |
| 2 | 2 | 33 | 61 | 92 | 122 | 153 | 183 | 214 | 245 | 275 | 306 | 336 |
| 3 | 3 | 34 | 62 | 93 | 123 | 154 | 184 | 215 | 246 | 276 | 307 | 337 |
| 4 | 4 | 35 | 63 | 94 | 124 | 155 | 185 | 216 | 247 | 277 | 308 | 338 |
| 5 | 5 | 36 | 64 | 95 | 125 | 156 | 186 | 217 | 248 | 278 | 309 | 339 |
| 6 | 6 | 37 | 65 | 96 | 126 | 157 | 187 | 218 | 249 | 279 | 310 | 340 |
| 7 | 7 | 38 | 66 | 97 | 127 | 158 | 188 | 219 | 250 | 280 | 311 | 341 |
| 8 | 8 | 39 | 67 | 98 | 128 | 159 | 189 | 220 | 251 | 281 | 312 | 342 |
| 9 | 9 | 40 | 68 | 99 | 129 | 160 | 190 | 221 | 252 | 282 | 313 | 343 |
| 10 | 10 | 41 | 69 | 100 | 130 | 161 | 191 | 222 | 253 | 283 | 314 | 344 |
| 11 | 11 | 42 | 70 | 101 | 131 | 162 | 192 | 223 | 254 | 284 | 315 | 345 |
| 12 | 12 | 43 | 71 | 102 | 132 | 163 | 193 | 224 | 255 | 285 | 316 | 346 |
| 13 | 13 | 44 | 72 | 103 | 133 | 164 | 194 | 225 | 256 | 286 | 317 | 347 |
| 14 | 14 | 45 | 73 | 104 | 134 | 165 | 195 | 226 | 257 | 287 | 318 | 348 |
| 15 | 15 | 46 | 74 | 105 | 135 | 166 | 196 | 227 | 258 | 288 | 319 | 349 |
| 16 | 16 | 47 | 75 | 106 | 136 | 167 | 197 | 228 | 259 | 289 | 320 | 350 |
| 17 | 17 | 48 | 76 | 107 | 137 | 168 | 198 | 229 | 260 | 290 | 321 | 351 |
| 18 | 18 | 49 | 77 | 108 | 138 | 169 | 199 | 230 | 261 | 291 | 322 | 352 |
| 19 | 19 | 50 | 78 | 109 | 139 | 170 | 200 | 231 | 262 | 292 | 323 | 353 |
| 20 | 20 | 51 | 79 | 110 | 140 | 171 | 201 | 232 | 263 | 293 | 324 | 354 |
| 21 | 21 | 52 | 80 | 111 | 141 | 172 | 202 | 233 | 264 | 294 | 325 | 355 |
| 22 | 22 | 53 | 81 | 112 | 142 | 173 | 203 | 234 | 265 | 295 | 326 | 356 |
| 23 | 23 | 54 | 82 | 113 | 143 | 174 | 204 | 235 | 266 | 296 | 327 | 357 |
| 24 | 24 | 55 | 83 | 114 | 144 | 175 | 205 | 236 | 267 | 297 | 328 | 358 |
| 25 | 25 | 56 | 84 | 115 | 145 | 176 | 206 | 237 | 268 | 298 | 329 | 359 |
| 26 | 26 | 57 | 85 | 116 | 146 | 177 | 207 | 238 | 269 | 299 | 330 | 360 |
| 27 | 27 | 58 | 86 | 117 | 147 | 178 | 208 | 239 | 270 | 300 | 331 | 361 |
| 28 | 28 | 59 | 87 | 118 | 148 | 179 | 209 | 240 | 271 | 301 | 332 | 362 |
| 29 | 29 | – | 88 | 119 | 149 | 180 | 210 | 241 | 272 | 302 | 333 | 363 |
| 30 | 30 | – | 89 | 120 | 150 | 181 | 211 | 242 | 273 | 303 | 334 | 364 |
| 31 | 31 | – | 90 | – | 151 | – | 212 | 243 | – | 304 | – | 365 |

**Nota:** Nos anos bissextos, adicionar 1 ao resultado obtido ao se considerar uma data anterior e outra posterior a 29 de fevereiro.

Como este ano é bissexto, então:

191 + 1 = 192 dias

c) Quantos dias existem entre 26 de setembro de 1974 e 5 de março de 1975?

*Resolução:*

Considerar inicialmente o número de dias do ano a terminar:

31.12.1974 = 365
26.09.1974 = 269
96

Temos, por conseguinte, 96 dias para terminar o ano de 1974. Os dias do ano seguinte (1975) serão dados diretamente pela tabela, visto que ela processa a contagem a partir do dia 1º de janeiro.

05.03.1975 = 64

Portanto:

64 + 96 = 160 dias.



# Tabelas Financeiras

As tabelas financeiras apresentadas a seguir se destinam à complementação do aprendizado, ou seja, são auxiliares na resolução dos problemas e exemplos propostos, sendo portanto muito simplificadas, quer quanto às taxas apresentadas, quer quanto ao número de períodos considerados.

## 1. $(1 + i)^n$ = MONTANTE DE 1, À TAXA $i$ PELO PRAZO $n$

### 1.1. Cálculo de montante e de valor atual

Este fator é utilizado para cálculo do montante de um capital aplicado à taxa $i$ pelo prazo $n$. Em termos genéricos, pode-se dizer que este fator é o elo entre o capital aplicado e o montante.

*1º Exemplo:* O capital de Cr$ 2.000,00 é aplicado por 12 meses, à taxa de 0,5% a.m. Qual é o montante?

*Resolução:*

$C_0$ = 2.000
$i$ = 0,5% a.m.

$n = 12$ meses

$C_n = ?$

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

Entrando na tabela para $i = 0{,}5\%$, encontramos, para $n = 12$, o fator $(1 + i)^n = 1{,}061678$.

Então:

$$C_n = 2.000(1 + 0{,}005)^{12}$$

$$C_n = 2.000(1{,}061678)$$

$$C_n \cong \text{Cr\$ } 2.123{,}36$$

*2º Exemplo:* Quanto deve ser aplicado a taxa de 2% a.t. para que após 36 trimestres se tenha o montante de Cr$ 12.000,00?

*Resolução:*

$C_n = 12.000$

$i = 2\%$ a.t.

$n = 36$ trimestres

$C_0 = ?$

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)^n}$$

Para $i = 2\%$ e $n = 36$, temos: $(1 + i)^n = 2{,}039887$

$$C_0 = \frac{12.000}{2{,}039887}$$

$$C_0 \cong \text{Cr\$ } 5.882{,}68$$

### 1.2. Cálculo de $(1 + i)^n$ para períodos não constantes na tabela

Considerando a propriedade de, na multiplicação de potências de mesma base, somarem-se os expoentes, temos que:

$$a^{m+j} = a^m \cdot a^j$$

Deste modo pode-se calcular o fator para um dado $n$, tomando-se dois ou mais fatores cuja soma de períodos a que se referem seja igual a $n$.

*Exemplo:* Calcular $(1 + 0{,}02)^{70}$



*Resolução:*

Na tabela de 2% temos o fator para $n = 60$ e para $n = 72$. O cálculo para $n = 70$ pode ser feito de diversos modos:

a) $(1{,}02)^{70} = (1{,}02)^{60} \cdot (1{,}02)^{10}$, visto que $70 = 60 + 10$

$(1{,}02)^{70} = (3{,}281031)(1{,}218994) \cong 3{,}999557$

b) $(1{,}02)^{70} = (1{,}02)^{35} \cdot (1{,}02)^{35}$, pois $70 = 35 + 35$

$(1{,}02)^{70} = (1{,}999890)(1{,}999890) \cong 3{,}999560$

c) $(1{,}02)^{70} = (1{,}02)^{72} \cdot (1{,}02)^{-2}$, pois $70 = 72 - 2$

$$(1{,}02)^{70} = \frac{4{,}161140}{1{,}040400} = 3{,}999558$$

*Observação:* A diferença entre os resultados se deve a aproximações nos valores tabelados.

## 2. $(1 + i)^{1/k}$ – TAXAS EQUIVALENTES

Para facilitar interpolações exponenciais no cálculo de períodos não inteiros, foram tabeladas as taxas equivalentes mais usuais, sendo as taxas apresentadas em sua forma percentual.

*Exemplo:* Calcular o montante referente à aplicação de Cr$ 5.000,00 por 3 anos e 4 meses, à taxa de 20% a.a.

*Resolução:*

$C_0 = 5.000$

$i = 20\%$ a.a.

$n = 3$ anos e 4 meses

$C_n = ?$

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

$$C_n = 5.000(1 + 0{,}20)^3(1 + i_q),$$

onde

$i_q$ = taxa equivalente quadrimestral

Na tabela de 20%, tem-se:

$(1{,}20)^3 = 1{,}728000$

$i_q = 6{,}265857\%$ a.q.

Portanto:

$$C_n = 5.000(1,728)(1,06265857) = \text{Cr\$ } 9.181,37$$

## 3. $a_{\overline{n}|i}$ – VALOR PRESENTE À TAXA $i$ DE "$n$" ANUIDADES UNITÁRIAS, IMEDIATAS, POSTECIPADAS E PERIÓDICAS

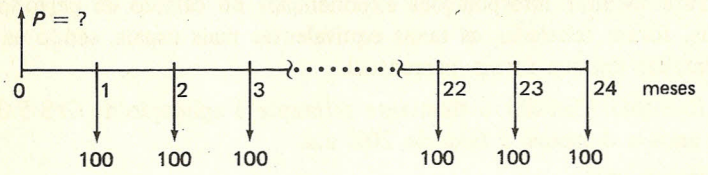
O fator $a_{\overline{n}|i}$ é a soma de uma progressão geométrica de $n$ termos e razão $(1 + i)^{-1}$, sendo o 1º termo igual a $(1 + i)^{-1}$ e o último $(1 + i)^{-n}$. Portanto:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

*1º Exemplo:* Calcular o valor presente (valor ou preço a vista) de 24 prestações mensais de Cr$ 100,00, à taxa de 2,5% a.m.

*Resolução:*

Temos que:




$R = 100$

$i = 2,5\%$ a.m.

$n = 24$ meses

$P = ?$

$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$

$P = 100 \cdot a_{\overline{24}|2,5}$

Na tabela de 2,5%, encontramos:

$a_{\overline{24}|2,5} = 17,884986$

$P = 100(17,884986)$

$P = \text{Cr\$ } 1.788,50$



*2º Exemplo:* Calcular o preço a vista de um carro que é vendido em 12 prestações trimestrais de Cr$ 5.000,00, considerando-se que a taxa contratada fora de 8% a.t.?

*Resolução:*

$R = 5.000$

$i = 8\%$ a.t.

$n = 12$ trimestres

$P = ?$

$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$

$P = 5.000 \cdot a_{\overline{12}|8}$

$P = 5.000(7,536078) = \text{Cr\$ } 37.680,39$

*3º Exemplo:* Uma geladeira é vendida por Cr$ 10.000,00 a vista ou em 12 prestações mensais de Cr$ 1.065,52 sem entrada. Qual é a taxa de juros mensal cobrada?

*Resolução:*

$P = 10.000$

$R = 1.065,52$

$n = 12$ meses

$i = ?$

$P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$

$10.000 = 1.065,52 \cdot a_{\overline{12}|i}$

$$a_{\overline{12}|i} = \frac{10.000}{1.065,52} = 9,385089$$

Procurando-se nas tabelas, tem-se:

$a_{\overline{12}|4} = 9,385074$

Visto que $9,385074 \cong 9,385089$, pode-se concluir que a taxa cobrada é de 4% a.m.

### 3.1. Variações do fator $a_{\overline{n}|i}$

O valor do $a_{\overline{n}|i}$ depende da taxa considerada e/ou do valor de $n$. Os efeitos individuais podem ser analisados do seguinte modo:

### 3.1.1. Variação na taxa de juros com $n$ constante

Seja $n = 12$

Então

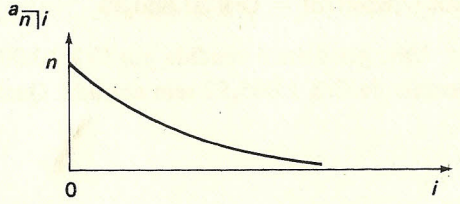
$$a_{\overline{12}|0} = 12{,}000000$$

$$a_{\overline{12}|5} = 8{,}863252$$

$$a_{\overline{12}|10} = 6{,}813692$$

$$a_{\overline{12}|50} = 1{,}984585$$

Vemos, por conseguinte, que mantendo-se *n constante*, o fator $a_{\overline{n}|i}$ decresce com o aumento da taxa de juros. Graficamente vem:




### 3.1.2. Variação em $n$ com a taxa de juros constante

Seja $i = 10\%$

Então:

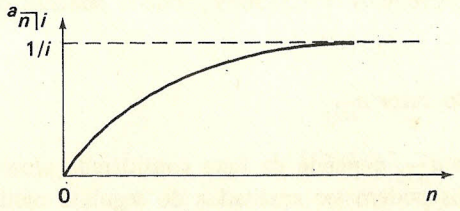
$$a_{\overline{6}|10} = 4{,}355261$$

$$a_{\overline{12}|10} = 6{,}813692$$

$$a_{\overline{24}|10} = 8{,}984744$$

$$a_{\overline{48}|10} = 9{,}896926$$

Concluímos que, mantendo-se *i constante*, o fator $a_{\overline{n}|i}$ cresce com o aumento de $n$.






## 4. $(a_{\overline{n}|i})^{-1}$ – PRESTAÇÕES CONSTANTES, IMEDIATAS, POSTECIPADAS E PERIÓDICAS PARA O VALOR ATUAL IGUAL A 1, CONSIDERANDO-SE A *TAXA DE JUROS i* E *n PRESTAÇÕES*

O fator $(a_{\overline{n}|i})^{-1}$ nada mais é do que o inverso de $a_{\overline{n}|i}$, então:

$$(a_{\overline{n}|i})^{-1} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Portanto, se temos o valor atual (preço a vista) e queremos encontrar o valor da prestação, considerando-se a *taxa i* e o número de *prestações n*, basta multiplicar o valor atual pelo fator $(a_{\overline{n}|i})^{-1}$.

*1º Exemplo:* Qual é a prestação mensal de um carro, cujo preço a vista é de Cr$ 50.000,00, se for contratada a taxa de 3,5% a.m. e o prazo for de 24 meses?

*Resolução:*

$P = 50.000$

$i = 3{,}5\%$ a.m.

$n = 24$ meses

$(a_{\overline{24}|3{,}5})^{-1} = 0{,}062273$

$$R = P(a_{\overline{n}|i})^{-1}$$

$$R = 50.000(0{,}062273) = \text{Cr\$ } 3.113{,}65$$

*2º Exemplo:* Um financiamento de Cr$ 100.000,00 é concedido a uma firma, para ser pago em 4 prestações semestrais iguais, à taxa de 20% a.s. Qual é o valor das prestações?

*Resolução:*

$P = 100.000$

$i = 20\%$ a.s.

$n = 4$ semestres

$(a_{\overline{4}|20})^{-1} = 0{,}386289$

$$R = P(a_{\overline{n}|i})^{-1}$$

$$R = 100.000(0{,}386289)$$

$$R = \text{Cr\$ } 38.628{,}90$$

### 4.1. Variações do fator $(a_{\overline{n}|i})^{-1}$

De modo análogo ao apresentado no item anterior, pode-se analisar o efeito da taxa ou do número de períodos mantendo-se uma variável constante e variando apenas a outra. Assim:

#### 4.1.1. Variação na taxa de juros com $n$ constante

Seja $n = 12$

Então:

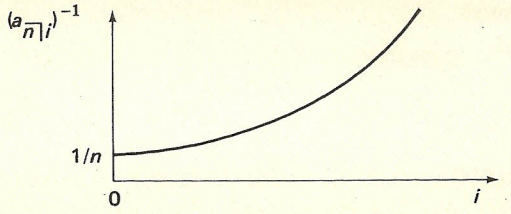
$$(a_{12|0})^{-1} = 0{,}083333$$

$$(a_{12|5})^{-1} = 0{,}112825$$

$$(a_{12|10})^{-1} = 0{,}146763$$

$$(a_{12|50})^{-1} = 0{,}503884$$

Portanto, mantendo-se *n constante*, o fator $(a_{\overline{n}|i})^{-1}$ cresce com o aumento da taxa de juros. Graficamente tem-se:




#### 4.1.2. Variação em $n$ com a taxa de juros constante

Seja $i = 10\%$

Então:

$$(a_{\overline{6}|10})^{-1} = 0{,}229607$$

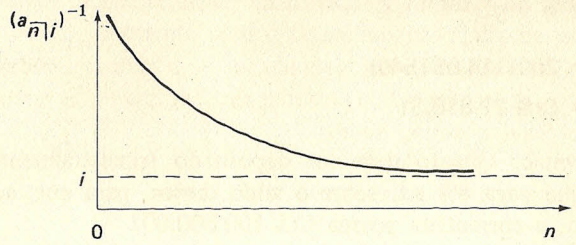
$$(a_{\overline{12}|10})^{-1} = 0{,}146763$$

$$(a_{\overline{24}|10})^{-1} = 0{,}111300$$

$$(a_{\overline{48}|10})^{-1} = 0{,}101041$$

Concluindo-se que, mantendo a *taxa constante*, o fator $(a_{\overline{n}|i})^{-1}$ decresce com o aumento do número de períodos.






**Nota:** Constata-se que as conclusões do item 4.1. são o inverso das conclusões do item 3.1., o que é lógico, visto que

$$(a_{\overline{n}|i})^{-1} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

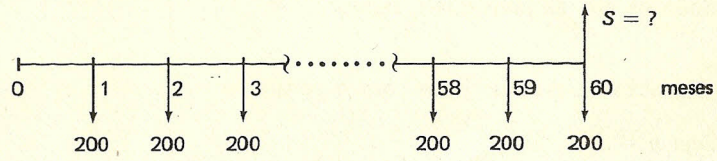
## 5. $S_{\overline{n}|i}$ – MONTANTE À TAXA $i$ DE $n$ PRESTAÇÕES UNITÁRIAS, IMEDIATAS, POSTECIPADAS E PERIÓDICAS

O fator $S_{\overline{n}|i}$ é a soma de uma progressão geométrica de $n$ termos, sendo o 1º termo igual a $(1 + i)^{n-1}$, o último igual a 1 e a razão igual a $(1 + i)$. Portanto:

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

*1º Exemplo:* Qual é o montante de 60 depósitos mensais de Cr$ 200,00, se o banco pagar 2% a.m. sobre o saldo credor?

*Resolução:*




$R = 200$

$i = 2\%$ a.m.

$n = 60$ meses

$S = ?$

$S_{\overline{60}|2} = 114{,}051540$

$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$

$S = 200(114{,}051540)$

$S = \text{Cr\$ } 22.810{,}31$

*2º Exemplo:* Quanto deve ser depositado trimestralmente em uma instituição que paga 8% a.t. sobre o saldo credor, para que, ao efetuar o 36º depósito, o correntista possua Cr$ 100.000,00?

*Resolução:*

$S = 100.000$

$i = 8\%$ a.t.

$n = 36$ trimestres

$R = ?$

$S_{\overline{36}|8} = 187{,}102148$

$$S = R \cdot S_{\overline{n}|i}$$

$$R = \frac{S}{S_{\overline{n}|i}}$$

$$R = \frac{100.000}{187{,}102148}$$

$R = \text{Cr\$ } 534{,}47$

## 5.1. Variações do fator $S_{\overline{n}|i}$

O valor do $S_{\overline{n}|i}$ depende da taxa considerada e/ou do valor de $n$. Analisando os efeitos individuais, temos:

### 5.1.1. Variação na taxa de juros com $n$ constante

Seja $n = 12$

Então:

$S_{\overline{12}|0} = 12{,}000000$

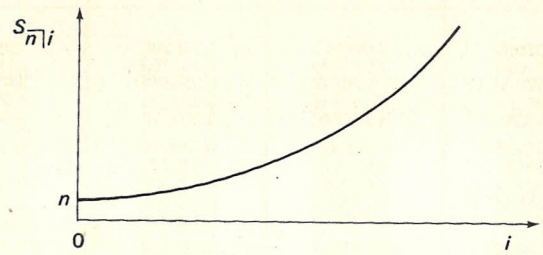
$S_{\overline{12}|5} = 15{,}917127$

$S_{\overline{12}|10} = 21{,}384284$

$S_{\overline{12}|50} = 257{,}492676$



Conclui-se, portanto, que, mantendo o *número de períodos constante*, o fator $S_{\overline{n}|i}$ aumenta com o acréscimo nas taxas de juros. Graficamente, teríamos:




### 5.1.2. Variação em $n$ com a taxa de juros constante

Seja $i = 10\%$

Então:

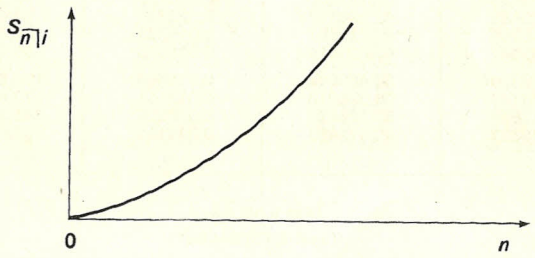
$S_{\overline{6}|10} = 7{,}715610$

$S_{\overline{12}|10} = 21{,}384284$

$S_{\overline{24}|10} = 88{,}497327$

$S_{\overline{48}|10} = 960{,}172337$

Por conseguinte, mantendo-se a taxa de juros constante, o fator $S_{\overline{n}|i}$ aumenta com o aumento do número de períodos. No gráfico visualizaríamos:



| $i = 0{,}5\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1+i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,005000 | 0,995025 | 1,005000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,010025 | 1,985099 | 0,503753 | 2,005000 | 2 |
| 3 | 1,015075 | 2,970248 | 0,336672 | 3,015025 | 3 |
| 4 | 1,020151 | 3,950496 | 0,253133 | 4,030100 | 4 |
| 5 | 1,025251 | 4,925866 | 0,203010 | 5,050251 | 5 |
| 6 | 1,030378 | 5,896384 | 0,169595 | 6,075502 | 6 |
| 7 | 1,035529 | 6,862074 | 0,145729 | 7,105879 | 7 |
| 8 | 1,040707 | 7,822959 | 0,127829 | 8,141409 | 8 |
| 9 | 1,045911 | 8,779064 | 0,113907 | 9,182116 | 9 |
| 10 | 1,051140 | 9,730412 | 0,102771 | 10,228026 | 10 |
| 11 | 1,056396 | 10,677027 | 0,093659 | 11,279167 | 11 |
| 12 | 1,061678 | 11,618932 | 0,086066 | 12,335562 | 12 |
| 13 | 1,066986 | 12,556151 | 0,079642 | 13,397240 | 13 |
| 14 | 1,072321 | 13,488708 | 0,074136 | 14,464226 | 14 |
| 15 | 1,077683 | 14,416625 | 0,069364 | 15,536547 | 15 |
| 16 | 1,083071 | 15,339925 | 0,065189 | 16,614230 | 16 |
| 17 | 1,088487 | 16,258632 | 0,061506 | 17,697301 | 17 |
| 18 | 1,093929 | 17,172768 | 0,058232 | 18,785788 | 18 |
| 19 | 1,099399 | 18,082356 | 0,055303 | 19,879717 | 19 |
| 20 | 1,104896 | 18,987419 | 0,052666 | 20,979115 | 20 |
| 21 | 1,110420 | 19,887979 | 0,050282 | 22,084011 | 21 |
| 22 | 1,115972 | 20,784059 | 0,048114 | 23,194431 | 22 |
| 23 | 1,121552 | 21,675681 | 0,046135 | 24,310403 | 23 |
| 24 | 1,127160 | 22,562866 | 0,044321 | 25,431955 | 24 |
| 25 | 1,132796 | 23,445638 | 0,042652 | 26,559115 | 25 |
| 26 | 1,138460 | 24,324018 | 0,041112 | 27,691911 | 26 |
| 27 | 1,144152 | 25,198028 | 0,039686 | 28,830370 | 27 |
| 28 | 1,149873 | 26,067689 | 0,038362 | 29,974522 | 28 |
| 29 | 1,155622 | 26,933024 | 0,037129 | 31,124395 | 29 |
| 30 | 1,161400 | 27,794054 | 0,035979 | 32,280016 | 30 |
| 31 | 1,167207 | 28,650800 | 0,034903 | 33,441417 | 31 |
| 32 | 1,173043 | 29,503283 | 0,033895 | 34,608624 | 32 |
| 33 | 1,178908 | 30,351526 | 0,032947 | 35,781667 | 33 |
| 34 | 1,184803 | 31,195548 | 0,032056 | 36,960575 | 34 |
| 35 | 1,190727 | 32,035371 | 0,031215 | 38,145378 | 35 |
| 36 | 1,196681 | 32,871016 | 0,030422 | 39,336105 | 36 |
| 42 | 1,233033 | 37,798300 | 0,026456 | 46,606540 | 42 |
| 48 | 1,270489 | 42,580318 | 0,023485 | 54,097832 | 48 |
| 60 | 1,348850 | 51,725561 | 0,019333 | 69,770030 | 60 |
| 72 | 1,432044 | 60,339514 | 0,016573 | 86,408855 | 72 |
| 84 | 1,520370 | 68,453042 | 0,014609 | 104,073927 | 84 |
| 96 | 1,614143 | 76,095218 | 0,013141 | 122,828541 | 96 |
| 108 | 1,713699 | 83,293424 | 0,012006 | 142,739899 | 108 |
| 120 | 1,819397 | 90,073453 | 0,011102 | 163,879347 | 120 |

Taxa 0,5% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,041572 | 0,083160 | 0,124766 | 0,166390 | 0,249688 |



| $i = 1{,}0\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1+i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,010000 | 0,990099 | 1,010000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,020100 | 1,970395 | 0,507512 | 2,010000 | 2 |
| 3 | 1,030301 | 2,940985 | 0,340022 | 3,030100 | 3 |
| 4 | 1,040604 | 3,901966 | 0,256281 | 4,060401 | 4 |
| 5 | 1,051010 | 4,853431 | 0,206040 | 5,101005 | 5 |
| 6 | 1,061520 | 5,795476 | 0,172548 | 6,152015 | 6 |
| 7 | 1,072135 | 6,728195 | 0,148628 | 7,213535 | 7 |
| 8 | 1,082857 | 7,651678 | 0,130690 | 8,285671 | 8 |
| 9 | 1,093685 | 8,566018 | 0,116740 | 9,368527 | 9 |
| 10 | 1,104622 | 9,471304 | 0,105582 | 10,462213 | 10 |
| 11 | 1,115668 | 10,367628 | 0,096454 | 11,566835 | 11 |
| 12 | 1,126825 | 11,255077 | 0,088849 | 12,682503 | 12 |
| 13 | 1,138093 | 12,133740 | 0,082415 | 13,809328 | 13 |
| 14 | 1,149474 | 13,003703 | 0,076901 | 14,947421 | 14 |
| 15 | 1,160969 | 13,865052 | 0,072124 | 16,096895 | 15 |
| 16 | 1,172579 | 14,717874 | 0,067945 | 17,257864 | 16 |
| 17 | 1,184304 | 15,562251 | 0,064258 | 18,430443 | 17 |
| 18 | 1,196147 | 16,398269 | 0,060982 | 19,614748 | 18 |
| 19 | 1,208109 | 17,226008 | 0,058052 | 20,810895 | 19 |
| 20 | 1,220190 | 18,045553 | 0,055415 | 22,019004 | 20 |
| 21 | 1,232392 | 18,856983 | 0,053031 | 23,239194 | 21 |
| 22 | 1,244716 | 19,660379 | 0,050864 | 24,471586 | 22 |
| 23 | 1,257163 | 20,455821 | 0,048886 | 25,716302 | 23 |
| 24 | 1,269735 | 21,243387 | 0,047073 | 26,973465 | 24 |
| 25 | 1,282432 | 22,023156 | 0,045407 | 28,243199 | 25 |
| 26 | 1,295256 | 22,795204 | 0,043869 | 29,525631 | 26 |
| 27 | 1,308209 | 23,559607 | 0,042446 | 30,820888 | 27 |
| 28 | 1,321291 | 24,316443 | 0,041124 | 32,129097 | 28 |
| 29 | 1,334504 | 25,065785 | 0,039895 | 33,450387 | 29 |
| 30 | 1,347849 | 25,807708 | 0,038748 | 34,784891 | 30 |
| 31 | 1,361327 | 26,542285 | 0,037676 | 36,132740 | 31 |
| 32 | 1,374941 | 27,269589 | 0,036671 | 37,494068 | 32 |
| 33 | 1,388690 | 27,989692 | 0,035727 | 38,869008 | 33 |
| 34 | 1,402577 | 28,702666 | 0,034840 | 40,257698 | 34 |
| 35 | 1,416603 | 29,408580 | 0,034004 | 41,660275 | 35 |
| 36 | 1,430769 | 30,107505 | 0,033214 | 43,076878 | 36 |
| 42 | 1,518790 | 34,158108 | 0,029276 | 51,878989 | 42 |
| 48 | 1,612226 | 37,973959 | 0,026334 | 61,222607 | 48 |
| 60 | 1,816697 | 44,955038 | 0,022244 | 81,669669 | 60 |
| 72 | 2,047099 | 51,150391 | 0,019550 | 104,709930 | 72 |
| 84 | 2,306723 | 56,648453 | 0,017653 | 130,672273 | 84 |
| 96 | 2,599273 | 61,527703 | 0,016253 | 159,927291 | 96 |
| 108 | 2,928926 | 65,857790 | 0,015184 | 192,892578 | 108 |
| 120 | 3,300387 | 69,700522 | 0,014347 | 230,038689 | 120 |

Taxa 1,0% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,082954 | 0,165976 | 0,249068 | 0,332228 | 0,498756 |

| $i = 1{,}5\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,015000 | 0,985222 | 1,015000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,030225 | 1,955883 | 0,511278 | 2,015000 | 2 |
| 3 | 1,045678 | 2,912200 | 0,343383 | 3,045225 | 3 |
| 4 | 1,061364 | 3,854385 | 0,259445 | 4,090903 | 4 |
| 5 | 1,077284 | 4,782645 | 0,209089 | 5,152267 | 5 |
| 6 | 1,093443 | 5,697187 | 0,175525 | 6,229551 | 6 |
| 7 | 1,109845 | 6,598214 | 0,151556 | 7,322994 | 7 |
| 8 | 1,126493 | 7,485925 | 0,133584 | 8,432839 | 8 |
| 9 | 1,143390 | 8,360517 | 0,119610 | 9,559332 | 9 |
| 10 | 1,160541 | 9,222185 | 0,108434 | 10,702722 | 10 |
| 11 | 1,177949 | 10,071118 | 0,099294 | 11,863262 | 11 |
| 12 | 1,195618 | 10,907505 | 0,091680 | 13,041211 | 12 |
| 13 | 1,213552 | 11,731532 | 0,085240 | 14,236830 | 13 |
| 14 | 1,231756 | 12,543382 | 0,079723 | 15,450382 | 14 |
| 15 | 1,250232 | 13,343233 | 0,074944 | 16,682138 | 15 |
| 16 | 1,268986 | 14,131264 | 0,070765 | 17,932370 | 16 |
| 17 | 1,288020 | 14,907649 | 0,067080 | 19,201355 | 17 |
| 18 | 1,307341 | 15,672561 | 0,063806 | 20,489376 | 18 |
| 19 | 1,326951 | 16,426168 | 0,060878 | 21,796716 | 19 |
| 20 | 1,346855 | 17,168639 | 0,058246 | 23,123667 | 20 |
| 21 | 1,367058 | 17,900137 | 0,055865 | 24,470522 | 21 |
| 22 | 1,387564 | 18,620824 | 0,053703 | 25,837580 | 22 |
| 23 | 1,408377 | 19,330861 | 0,051731 | 27,225144 | 23 |
| 24 | 1,429503 | 20,030405 | 0,049924 | 28,633521 | 24 |
| 25 | 1,450945 | 20,719611 | 0,048263 | 30,063024 | 25 |
| 26 | 1,472710 | 21,398632 | 0,046732 | 31,513969 | 26 |
| 27 | 1,494800 | 22,067617 | 0,045315 | 32,986679 | 27 |
| 28 | 1,517222 | 22,726717 | 0,044001 | 34,481479 | 28 |
| 29 | 1,539981 | 23,376076 | 0,042779 | 35,998701 | 29 |
| 30 | 1,563080 | 24,015838 | 0,041639 | 37,538681 | 30 |
| 31 | 1,586526 | 24,646146 | 0,040574 | 39,101762 | 31 |
| 32 | 1,610324 | 25,267139 | 0,039577 | 40,688288 | 32 |
| 33 | 1,634479 | 25,878954 | 0,038641 | 42,298612 | 33 |
| 34 | 1,658996 | 26,481729 | 0,037762 | 43,933092 | 34 |
| 35 | 1,683881 | 27,075595 | 0,036934 | 45,592088 | 35 |
| 36 | 1,709140 | 27,660684 | 0,036152 | 47,275969 | 36 |
| 42 | 1,868847 | 30,994050 | 0,032264 | 57,923141 | 42 |
| 48 | 2,043478 | 34,042554 | 0,029375 | 69,565219 | 48 |
| 60 | 2,443220 | 39,380269 | 0,025393 | 96,214652 | 60 |
| 72 | 2,921158 | 43,844667 | 0,022808 | 128,077198 | 72 |
| 84 | 3,492590 | 47,578633 | 0,021018 | 166,172636 | 84 |
| 96 | 4,175804 | 50,701675 | 0,019723 | 211,720235 | 96 |
| 108 | 4,992667 | 53,313749 | 0,018757 | 266,177771 | 108 |
| 120 | 5,969323 | 55,498454 | 0,018019 | 331,288191 | 120 |

Taxa 1,5% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,124149 | 0,248452 | 0,372909 | 0,497521 | 0,747208 |



| $i = 2\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,020000 | 0,980392 | 1,020000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,040400 | 1,941561 | 0,515050 | 2,020000 | 2 |
| 3 | 1,061208 | 2,883883 | 0,346755 | 3,060400 | 3 |
| 4 | 1,082432 | 3,807729 | 0,262624 | 4,121608 | 4 |
| 5 | 1,104081 | 4,713460 | 0,212158 | 5,204040 | 5 |
| 6 | 1,126162 | 5,601431 | 0,178526 | 6,308121 | 6 |
| 7 | 1,148686 | 6,471991 | 0,154512 | 7,434283 | 7 |
| 8 | 1,171659 | 7,325481 | 0,136510 | 8,582969 | 8 |
| 9 | 1,195093 | 8,162237 | 0,122515 | 9,754628 | 9 |
| 10 | 1,218994 | 8,982585 | 0,111327 | 10,949721 | 10 |
| 11 | 1,243374 | 9,786848 | 0,102178 | 12,168715 | 11 |
| 12 | 1,268242 | 10,575341 | 0,094560 | 13,412090 | 12 |
| 13 | 1,293607 | 11,348374 | 0,088118 | 14,680332 | 13 |
| 14 | 1,319479 | 12,106249 | 0,082602 | 15,973938 | 14 |
| 15 | 1,345868 | 12,849264 | 0,077825 | 17,293417 | 15 |
| 16 | 1,372786 | 13,577709 | 0,073650 | 18,639285 | 16 |
| 17 | 1,400241 | 14,291872 | 0,069970 | 20,012071 | 17 |
| 18 | 1,428246 | 14,992031 | 0,066702 | 21,412312 | 18 |
| 19 | 1,456811 | 15,678462 | 0,063782 | 22,840559 | 19 |
| 20 | 1,485947 | 16,351433 | 0,061157 | 24,297370 | 20 |
| 21 | 1,515666 | 17,011209 | 0,058785 | 25,783317 | 21 |
| 22 | 1,545980 | 17,658048 | 0,056631 | 27,298984 | 22 |
| 23 | 1,576899 | 18,292204 | 0,054668 | 28,844963 | 23 |
| 24 | 1,608437 | 18,913926 | 0,052871 | 30,421863 | 24 |
| 25 | 1,640606 | 19,523456 | 0,051220 | 32,030300 | 25 |
| 26 | 1,673418 | 20,121036 | 0,049699 | 33,670906 | 26 |
| 27 | 1,706886 | 20,706898 | 0,048293 | 35,344324 | 27 |
| 28 | 1,741024 | 21,281272 | 0,046990 | 37,051210 | 28 |
| 29 | 1,775845 | 21,844385 | 0,045778 | 38,792235 | 29 |
| 30 | 1,811362 | 22,396456 | 0,044650 | 40,568079 | 30 |
| 31 | 1,847589 | 22,937702 | 0,043596 | 42,379441 | 31 |
| 32 | 1,884541 | 23,468335 | 0,042611 | 44,227030 | 32 |
| 33 | 1,922231 | 23,988564 | 0,041687 | 46,111570 | 33 |
| 34 | 1,960676 | 24,498592 | 0,040819 | 48,033802 | 34 |
| 35 | 1,999890 | 24,998619 | 0,040002 | 49,994478 | 35 |
| 36 | 2,039887 | 25,488842 | 0,039233 | 51,994367 | 36 |
| 42 | 2,297244 | 28,234794 | 0,035417 | 64,862223 | 42 |
| 48 | 2,587070 | 30,673120 | 0,032602 | 79,353519 | 48 |
| 60 | 3,281031 | 34,760887 | 0,028768 | 114,051540 | 60 |
| 72 | 4,161140 | 37,984063 | 0,026327 | 158,057019 | 72 |
| 84 | 5,277332 | 40,525516 | 0,024676 | 213,866607 | 84 |
| 96 | 6,692933 | 42,529434 | 0,023513 | 284,646659 | 96 |
| 108 | 8,488258 | 44,109510 | 0,022671 | 374,412879 | 108 |
| 120 | 10,765163 | 45,355389 | 0,022048 | 488,258152 | 120 |

Taxa 2% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,165158 | 0,330589 | 0,496293 | 0,662271 | 0,995049 |

| $i = 2{,}5\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,025000 | 0,975610 | 1,025000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,050625 | 1,927424 | 0,518827 | 2,025000 | 2 |
| 3 | 1,076891 | 2,856024 | 0,350137 | 3,075625 | 3 |
| 4 | 1,103813 | 3,761974 | 0,265818 | 4,152516 | 4 |
| 5 | 1,131408 | 4,645829 | 0,215247 | 5,256329 | 5 |
| 6 | 1,159693 | 5,508125 | 0,181550 | 6,387737 | 6 |
| 7 | 1,188686 | 6,349391 | 0,157495 | 7,547430 | 7 |
| 8 | 1,218403 | 7,170137 | 0,139467 | 8,736116 | 8 |
| 9 | 1,248863 | 7,970866 | 0,125457 | 9,954519 | 9 |
| 10 | 1,280085 | 8,752064 | 0,114259 | 11,203382 | 10 |
| 11 | 1,312087 | 9,514209 | 0,105106 | 12,483466 | 11 |
| 12 | 1,344889 | 10,257765 | 0,097487 | 13,795553 | 12 |
| 13 | 1,378511 | 10,983185 | 0,091048 | 15,140442 | 13 |
| 14 | 1,412974 | 11,690912 | 0,085537 | 16,518953 | 14 |
| 15 | 1,448298 | 12,381378 | 0,080766 | 17,931927 | 15 |
| 16 | 1,484506 | 13,055003 | 0,076599 | 19,380225 | 16 |
| 17 | 1,521618 | 13,712198 | 0,072928 | 20,864730 | 17 |
| 18 | 1,559659 | 14,353364 | 0,069670 | 22,386349 | 18 |
| 19 | 1,598650 | 14,978891 | 0,066761 | 23,946007 | 19 |
| 20 | 1,638616 | 15,589162 | 0,064147 | 25,544658 | 20 |
| 21 | 1,679582 | 16,184549 | 0,061787 | 27,183274 | 21 |
| 22 | 1,721571 | 16,765413 | 0,059647 | 28,862856 | 22 |
| 23 | 1,764611 | 17,332110 | 0,057696 | 30,584427 | 23 |
| 24 | 1,808726 | 17,884986 | 0,055913 | 32,349038 | 24 |
| 25 | 1,853944 | 18,424376 | 0,054276 | 34,157764 | 25 |
| 26 | 1,900293 | 18,950611 | 0,052769 | 36,011708 | 26 |
| 27 | 1,947800 | 19,464011 | 0,051377 | 37,912001 | 27 |
| 28 | 1,996495 | 19,964889 | 0,050088 | 39,859801 | 28 |
| 29 | 2,046407 | 20,453550 | 0,048891 | 41,856296 | 29 |
| 30 | 2,097568 | 20,930293 | 0,047778 | 43,902703 | 30 |
| 31 | 2,150007 | 21,395407 | 0,046739 | 46,000271 | 31 |
| 32 | 2,203757 | 21,849178 | 0,045768 | 48,150278 | 32 |
| 33 | 2,258851 | 22,291881 | 0,044859 | 50,354034 | 33 |
| 34 | 2,315322 | 22,723786 | 0,044007 | 52,612885 | 34 |
| 35 | 2,373205 | 23,145157 | 0,043206 | 54,928207 | 35 |
| 36 | 2,432535 | 23,556251 | 0,042452 | 57,301413 | 36 |
| 42 | 2,820995 | 25,820607 | 0,038729 | 72,839808 | 42 |
| 48 | 3,271490 | 27,773154 | 0,036006 | 90,859583 | 48 |
| 60 | 4,399790 | 30,908656 | 0,032353 | 135,991590 | 60 |
| 72 | 5,917228 | 33,240078 | 0,030084 | 196,689123 | 72 |
| 84 | 7,958014 | 34,973620 | 0,028593 | 278,320556 | 84 |
| 96 | 10,702644 | 36,262606 | 0,027577 | 388,105758 | 96 |
| 108 | 14,393866 | 37,221039 | 0,026867 | 535,754650 | 108 |
| 120 | 19,358150 | 37,933687 | 0,026362 | 734,325993 | 120 |

Taxa 2,5% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,205984 | 0,412392 | 0,619225 | 0,826484 | 1,242284 |



| $i = 3\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,030000 | 0,970874 | 1,030000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,060900 | 1,913470 | 0,522611 | 2,030000 | 2 |
| 3 | 1,092727 | 2,828611 | 0,353530 | 3,090900 | 3 |
| 4 | 1,125509 | 3,717098 | 0,269027 | 4,183627 | 4 |
| 5 | 1,159274 | 4,579707 | 0,218355 | 5,309136 | 5 |
| 6 | 1,194052 | 5,417191 | 0,184598 | 6,468410 | 6 |
| 7 | 1,229874 | 6,230283 | 0,160506 | 7,662462 | 7 |
| 8 | 1,266770 | 7,019692 | 0,142456 | 8,892336 | 8 |
| 9 | 1,304773 | 7,786109 | 0,128434 | 10,159106 | 9 |
| 10 | 1,343916 | 8,530203 | 0,117231 | 11,463879 | 10 |
| 11 | 1,384234 | 9,252624 | 0,108077 | 12,807796 | 11 |
| 12 | 1,425761 | 9,954004 | 0,100462 | 14,192030 | 12 |
| 13 | 1,468534 | 10,634955 | 0,094030 | 15,617790 | 13 |
| 14 | 1,512590 | 11,296073 | 0,088526 | 17,086324 | 14 |
| 15 | 1,557967 | 11,937935 | 0,083767 | 18,598914 | 15 |
| 16 | 1,604706 | 12,561102 | 0,079611 | 20,156881 | 16 |
| 17 | 1,652848 | 13,166118 | 0,075953 | 21,761588 | 17 |
| 18 | 1,702433 | 13,753513 | 0,072709 | 23,414435 | 18 |
| 19 | 1,753506 | 14,323799 | 0,069814 | 25,116868 | 19 |
| 20 | 1,806111 | 14,877475 | 0,067216 | 26,870374 | 20 |
| 21 | 1,860295 | 15,415024 | 0,064872 | 28,676486 | 21 |
| 22 | 1,916103 | 15,936917 | 0,062747 | 30,536780 | 22 |
| 23 | 1,973587 | 16,443608 | 0,060814 | 32,452884 | 23 |
| 24 | 2,032794 | 16,935542 | 0,059047 | 34,426470 | 24 |
| 25 | 2,093778 | 17,413148 | 0,057428 | 36,459264 | 25 |
| 26 | 2,156591 | 17,876842 | 0,055938 | 38,553042 | 26 |
| 27 | 2,221289 | 18,327031 | 0,054564 | 40,709633 | 27 |
| 28 | 2,287928 | 18,764108 | 0,053293 | 42,930922 | 28 |
| 29 | 2,356566 | 19,188455 | 0,052115 | 45,218850 | 29 |
| 30 | 2,427262 | 19,600441 | 0,051019 | 47,575416 | 30 |
| 31 | 2,500080 | 20,000428 | 0,049999 | 50,002678 | 31 |
| 32 | 2,575083 | 20,388766 | 0,049047 | 52,502758 | 32 |
| 33 | 2,652335 | 20,765792 | 0,048156 | 55,077841 | 33 |
| 34 | 2,731905 | 21,131837 | 0,047322 | 57,730176 | 34 |
| 35 | 2,813862 | 21,487220 | 0,046539 | 60,462082 | 35 |
| 36 | 2,898278 | 21,832252 | 0,045804 | 63,275944 | 36 |
| 42 | 3,460696 | 23,701359 | 0,042192 | 82,023196 | 42 |
| 48 | 4,132252 | 25,266707 | 0,039578 | 104,408396 | 48 |
| 60 | 5,891603 | 27,675564 | 0,036133 | 163,053437 | 60 |
| 72 | 8,400017 | 29,365088 | 0,034054 | 246,667242 | 72 |
| 84 | 11,976416 | 30,550086 | 0,032733 | 365,880536 | 84 |
| 96 | 17,075506 | 31,381219 | 0,031866 | 535,850186 | 96 |
| 108 | 24,345588 | 31,964160 | 0,031285 | 778,186267 | 108 |
| 120 | 34,710987 | 32,373023 | 0,030890 | 1.123,699571 | 120 |

Taxa 3% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,246627 | 0,493862 | 0,741707 | 0,990163 | 1,488916 |

| $i = 3{,}5\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1+i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,035000 | 0,966184 | 1,035000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,071225 | 1,899694 | 0,526400 | 2,035000 | 2 |
| 3 | 1,108718 | 2,801637 | 0,356934 | 3,106225 | 3 |
| 4 | 1,147523 | 3,673079 | 0,272251 | 4,214943 | 4 |
| 5 | 1,187686 | 4,515052 | 0,221481 | 5,362466 | 5 |
| 6 | 1,229255 | 5,328553 | 0,187668 | 6,550152 | 6 |
| 7 | 1,272279 | 6,114544 | 0,163544 | 7,779407 | 7 |
| 8 | 1,316809 | 6,873956 | 0,145477 | 9,051687 | 8 |
| 9 | 1,362897 | 7,607687 | 0,131446 | 10,368496 | 9 |
| 10 | 1,410599 | 8,316605 | 0,120241 | 11,731393 | 10 |
| 11 | 1,459970 | 9,001551 | 0,111092 | 13,141992 | 11 |
| 12 | 1,511069 | 9,663334 | 0,103484 | 14,601962 | 12 |
| 13 | 1,563956 | 10,302738 | 0,097062 | 16,113030 | 13 |
| 14 | 1,618695 | 10,920520 | 0,091571 | 17,676986 | 14 |
| 15 | 1,675349 | 11,517411 | 0,086825 | 19,295681 | 15 |
| 16 | 1,733986 | 12,094117 | 0,082685 | 20,971030 | 16 |
| 17 | 1,794676 | 12,651321 | 0,079043 | 22,705016 | 17 |
| 18 | 1,857489 | 13,189682 | 0,075817 | 24,499691 | 18 |
| 19 | 1,922501 | 13,709837 | 0,072940 | 26,357180 | 19 |
| 20 | 1,989789 | 14,212403 | 0,070361 | 28,279682 | 20 |
| 21 | 2,059431 | 14,697974 | 0,068037 | 30,269471 | 21 |
| 22 | 2,131512 | 15,167125 | 0,065932 | 32,328902 | 22 |
| 23 | 2,206114 | 15,620410 | 0,064019 | 34,460414 | 23 |
| 24 | 2,283328 | 16,058368 | 0,062273 | 36,666528 | 24 |
| 25 | 2,363245 | 16,481515 | 0,060674 | 38,949857 | 25 |
| 26 | 2,445959 | 16,890352 | 0,059205 | 41,313102 | 26 |
| 27 | 2,531567 | 17,285365 | 0,057852 | 43,759060 | 27 |
| 28 | 2,620172 | 17,667019 | 0,056603 | 46,290627 | 28 |
| 29 | 2,711878 | 18,035767 | 0,055445 | 48,910799 | 29 |
| 30 | 2,806794 | 18,392045 | 0,054371 | 51,622677 | 30 |
| 31 | 2,905031 | 18,736276 | 0,053372 | 54,429471 | 31 |
| 32 | 3,006708 | 19,068865 | 0,052442 | 57,334502 | 32 |
| 33 | 3,111942 | 19,390208 | 0,051572 | 60,341210 | 33 |
| 34 | 3,220860 | 19,700684 | 0,050760 | 63,453152 | 34 |
| 35 | 3,333590 | 20,000661 | 0,049998 | 66,674013 | 35 |
| 36 | 3,450266 | 20,290494 | 0,049284 | 70,007603 | 36 |
| 42 | 4,241258 | 21,834883 | 0,045798 | 92,607371 | 42 |
| 48 | 5,213589 | 23,091244 | 0,043306 | 120,388257 | 48 |
| 60 | 7,878091 | 24,944734 | 0,040089 | 196,516883 | 60 |
| 72 | 11,904336 | 26,171343 | 0,038210 | 311,552464 | 72 |
| 84 | 17,988269 | 26,983092 | 0,037060 | 485,379125 | 84 |
| 96 | 27,181510 | 27,520294 | 0,036337 | 748,043145 | 96 |
| 108 | 41,073128 | 27,875805 | 0,035873 | 1.144,946512 | 108 |
| 120 | 62,064316 | 28,111077 | 0,035573 | 1.744,694750 | 120 |

Taxa 3,5% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,287090 | 0,575004 | 0,863745 | 1,153314 | 1,734950 |



| $i = 4\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1+i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,040000 | 0,961538 | 1,040000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,081600 | 1,886095 | 0,530196 | 2,040000 | 2 |
| 3 | 1,124864 | 2,775091 | 0,360349 | 3,121600 | 3 |
| 4 | 1,169859 | 3,629895 | 0,275490 | 4,246464 | 4 |
| 5 | 1,216653 | 4,451822 | 0,224627 | 5,416323 | 5 |
| 6 | 1,265319 | 5,242137 | 0,190762 | 6,632975 | 6 |
| 7 | 1,315932 | 6,002055 | 0,166610 | 7,898295 | 7 |
| 8 | 1,368569 | 6,732745 | 0,148528 | 9,214226 | 8 |
| 9 | 1,423312 | 7,435332 | 0,134493 | 10,582795 | 9 |
| 10 | 1,480244 | 8,110896 | 0,123291 | 12,006107 | 10 |
| 11 | 1,539454 | 8,760477 | 0,114149 | 13,486351 | 11 |
| 12 | 1,601032 | 9,385074 | 0,106552 | 15,025805 | 12 |
| 13 | 1,665074 | 9,985648 | 0,100144 | 16,626838 | 13 |
| 14 | 1,731676 | 10,563123 | 0,094669 | 18,291911 | 14 |
| 15 | 1,800944 | 11,118387 | 0,089941 | 20,023588 | 15 |
| 16 | 1,872981 | 11,652296 | 0,085820 | 21,824531 | 16 |
| 17 | 1,947900 | 12,165669 | 0,082199 | 23,697512 | 17 |
| 18 | 2,025817 | 12,659297 | 0,078993 | 25,645413 | 18 |
| 19 | 2,106849 | 13,133939 | 0,076139 | 27,671229 | 19 |
| 20 | 2,191123 | 13,590326 | 0,073582 | 29,778079 | 20 |
| 21 | 2,278768 | 14,029160 | 0,071280 | 31,969202 | 21 |
| 22 | 2,369919 | 14,451115 | 0,069199 | 34,247970 | 22 |
| 23 | 2,464716 | 14,856842 | 0,067309 | 36,617889 | 23 |
| 24 | 2,563304 | 15,246963 | 0,065587 | 39,082604 | 24 |
| 25 | 2,665836 | 15,622080 | 0,064012 | 41,645908 | 25 |
| 26 | 2,772470 | 15,982769 | 0,062567 | 44,311745 | 26 |
| 27 | 2,883369 | 16,329586 | 0,061239 | 47,084214 | 27 |
| 28 | 2,998703 | 16,663063 | 0,060013 | 49,967583 | 28 |
| 29 | 3,118651 | 16,983715 | 0,058880 | 52,966286 | 29 |
| 30 | 3,243398 | 17,292033 | 0,057830 | 56,084938 | 30 |
| 31 | 3,373133 | 17,588494 | 0,056855 | 59,328335 | 31 |
| 32 | 3,508059 | 17,873552 | 0,055949 | 62,701469 | 32 |
| 33 | 3,648381 | 18,147646 | 0,055104 | 66,209528 | 33 |
| 34 | 3,794316 | 18,411198 | 0,054315 | 69,857909 | 34 |
| 35 | 3,946089 | 18,664613 | 0,053577 | 73,652225 | 35 |
| 36 | 4,103933 | 18,908282 | 0,052887 | 77,598314 | 36 |
| 42 | 5,192784 | 20,185627 | 0,049540 | 104,819598 | 42 |
| 48 | 6,570528 | 21,195131 | 0,047181 | 139,263206 | 48 |
| 60 | 10,519627 | 22,623490 | 0,044202 | 237,990685 | 60 |
| 72 | 16,842262 | 23,515639 | 0,042525 | 396,056560 | 72 |
| 84 | 26,965705 | 24,072872 | 0,041541 | 649,125119 | 84 |
| 96 | 43,171341 | 24,420919 | 0,040949 | 1.054,296034 | 96 |
| 108 | 69,119509 | 24,638308 | 0,040587 | 1.702,987724 | 108 |
| 120 | 110,662561 | 24,774088 | 0,040365 | 2.741,564020 | 120 |

Taxa 4% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,327374 | 0,655820 | 0,985341 | 1,315940 | 1,980390 |

| $i = 4{,}5\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,045000 | 0,956938 | 1,045000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,092025 | 1,872668 | 0,533998 | 2,045000 | 2 |
| 3 | 1,141166 | 2,748964 | 0,363773 | 3,137025 | 3 |
| 4 | 1,192519 | 3,587526 | 0,278744 | 4,278191 | 4 |
| 5 | 1,246182 | 4,389977 | 0,227792 | 5,470710 | 5 |
| 6 | 1,302260 | 5,157872 | 0,193878 | 6,716892 | 6 |
| 7 | 1,360862 | 5,892701 | 0,169701 | 8,019152 | 7 |
| 8 | 1,422101 | 6,595886 | 0,151610 | 9,380014 | 8 |
| 9 | 1,486095 | 7,268790 | 0,137574 | 10,802114 | 9 |
| 10 | 1,552969 | 7,912718 | 0,126379 | 12,288209 | 10 |
| 11 | 1,622853 | 8,528917 | 0,117248 | 13,841179 | 11 |
| 12 | 1,695881 | 9,118581 | 0,109666 | 15,464032 | 12 |
| 13 | 1,772196 | 9,682852 | 0,103275 | 17,159913 | 13 |
| 14 | 1,851945 | 10,222825 | 0,097820 | 18,932109 | 14 |
| 15 | 1,935282 | 10,739546 | 0,093114 | 20,784054 | 15 |
| 16 | 2,022370 | 11,234015 | 0,089015 | 22,719337 | 16 |
| 17 | 2,113377 | 11,707191 | 0,085418 | 24,741707 | 17 |
| 18 | 2,208479 | 12,159992 | 0,082237 | 26,855084 | 18 |
| 19 | 2,307860 | 12,593294 | 0,079407 | 29,063562 | 19 |
| 20 | 2,411714 | 13,007936 | 0,076876 | 31,371423 | 20 |
| 21 | 2,520241 | 13,404724 | 0,074601 | 33,783137 | 21 |
| 22 | 2,633652 | 13,784425 | 0,072546 | 36,303378 | 22 |
| 23 | 2,752166 | 14,147775 | 0,070682 | 38,937030 | 23 |
| 24 | 2,876014 | 14,495478 | 0,068987 | 41,689196 | 24 |
| 25 | 3,005434 | 14,828209 | 0,067439 | 44,565210 | 25 |
| 26 | 3,140679 | 15,146611 | 0,066021 | ,570645 | 26 |
| 27 | 3,282010 | 15,451303 | 0,064719 | 50,711324 | 27 |
| 28 | 3,429700 | 15,742874 | 0,063521 | 53,993333 | 28 |
| 29 | 3,584036 | 16,021889 | 0,062415 | 57,423033 | 29 |
| 30 | 3,745318 | 16,288889 | 0,061392 | 61,007070 | 30 |
| 31 | 3,913857 | 16,544391 | 0,060443 | 64,752388 | 31 |
| 32 | 4,089981 | 16,788891 | 0,059563 | 68,666245 | 32 |
| 33 | 4,274030 | 17,022862 | 0,058745 | 72,756226 | 33 |
| 34 | 4,466362 | 17,246758 | 0,057982 | 77,030256 | 34 |
| 35 | 4,667348 | 17,461012 | 0,057270 | 81,496618 | 35 |
| 36 | 4,877378 | 17,666041 | 0,056606 | 86,163966 | 36 |
| 42 | 6,351615 | 18,723550 | 0,053409 | 118,924789 | 42 |
| 48 | 8,271456 | 19,535607 | 0,051189 | 161,587902 | 48 |
| 60 | 14,027408 | 20,638022 | 0,048454 | 289,497954 | 60 |
| 72 | 23,788821 | 21,288077 | 0,046975 | 506,418236 | 72 |
| 84 | 40,343019 | 21,671390 | 0,046144 | 874,289317 | 84 |
| 96 | 68,416977 | 21,897417 | 0,045667 | 1.498,155051 | 96 |
| 108 | 116,027081 | 22,030696 | 0,045391 | 2.556,157367 | 108 |
| 120 | 196,768173 | 22,109286 | 0,045230 | 4.350,403849 | 120 |

Taxa 4,5% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,367481 | 0,736312 | 1,106499 | 1,478046 | 2,225242 |



| $i = 5\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,050000 | 0,952381 | 1,050000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,102500 | 1,859410 | 0,537805 | 2,050000 | 2 |
| 3 | 1,157625 | 2,723248 | 0,367209 | 3,152500 | 3 |
| 4 | 1,215506 | 3,545951 | 0,282012 | 4,310125 | 4 |
| 5 | 1,276282 | 4,329477 | 0,230975 | 5,525631 | 5 |
| 6 | 1,340096 | 5,075692 | 0,197017 | 6,801913 | 6 |
| 7 | 1,407100 | 5,786373 | 0,172820 | 8,142008 | 7 |
| 8 | 1,477455 | 6,463213 | 0,154722 | 9,549109 | 8 |
| 9 | 1,551328 | 7,107822 | 0,140690 | 11,026564 | 9 |
| 10 | 1,628895 | 7,721735 | 0,129505 | 12,577893 | 10 |
| 11 | 1,710339 | 8,306414 | 0,120389 | 14,206787 | 11 |
| 12 | 1,795856 | 8,863252 | 0,112825 | 15,917127 | 12 |
| 13 | 1,885649 | 9,393573 | 0,106456 | 17,712983 | 13 |
| 14 | 1,979932 | 9,898641 | 0,101024 | 19,598632 | 14 |
| 15 | 2,078928 | 10,379658 | 0,096342 | 21,578564 | 15 |
| 16 | 2,182875 | 10,837770 | 0,092270 | 23,657492 | 16 |
| 17 | 2,292018 | 11,274066 | 0,088699 | 25,840366 | 17 |
| 18 | 2,406619 | 11,689587 | 0,085546 | 28,132385 | 18 |
| 19 | 2,526950 | 12,085321 | 0,082745 | 30,539004 | 19 |
| 20 | 2,653298 | 12,462210 | 0,080243 | 33,065954 | 20 |
| 21 | 2,785963 | 12,821153 | 0,077996 | 35,719252 | 21 |
| 22 | 2,925261 | 13,163003 | 0,075971 | 38,505214 | 22 |
| 23 | 3,071524 | 13,488574 | 0,074137 | 41,430475 | 23 |
| 24 | 3,225100 | 13,798642 | 0,072471 | 44,501999 | 24 |
| 25 | 3,386355 | 14,093945 | 0,070952 | 47,727099 | 25 |
| 26 | 3,555673 | 14,375185 | 0,069564 | 51,113454 | 26 |
| 27 | 3,733456 | 14,643034 | 0,068292 | 54,669126 | 27 |
| 28 | 3,920129 | 14,898127 | 0,067123 | 58,402583 | 28 |
| 29 | 4,116136 | 15,141074 | 0,066046 | 62,322712 | 29 |
| 30 | 4,321942 | 15,372451 | 0,065051 | 66,438848 | 30 |
| 31 | 4,538039 | 15,592811 | 0,064132 | 70,760790 | 31 |
| 32 | 4,764941 | 15,802677 | 0,063280 | 75,298829 | 32 |
| 33 | 5,003189 | 16,002549 | 0,062490 | 80,063771 | 33 |
| 34 | 5,253348 | 16,192904 | 0,061755 | 85,066960 | 34 |
| 35 | 5,516015 | 16,374194 | 0,061072 | 90,320307 | 35 |
| 36 | 5,791816 | 16,546852 | 0,060434 | 95,836323 | 36 |
| 42 | 7,761588 | 17,423208 | 0,057395 | 135,231751 | 42 |
| 48 | 10,401270 | 18,077158 | 0,055318 | 188,025393 | 48 |
| 60 | 18,679186 | 18,929290 | 0,052828 | 353,583718 | 60 |
| 72 | 33,545134 | 19,403788 | 0,051536 | 650,902683 | 72 |
| 84 | 60,242241 | 19,668007 | 0,050844 | 1.184,844828 | 84 |
| 96 | 108,186410 | 19,815134 | 0,050466 | 2.143,728205 | 96 |
| 108 | 194,287249 | 19,897060 | 0,050259 | 3.865,744985 | 108 |
| 120 | 348,911986 | 19,942679 | 0,050144 | 6.958,239713 | 120 |

Taxa 5% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,407412 | 0,816485 | 1,227223 | 1,639636 | 2,469508 |

| $i = 5{,}5\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,055000 | 0,947867 | 1,055000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,113025 | 1,846320 | 0,541618 | 2,055000 | 2 |
| 3 | 1,174241 | 2,697933 | 0,370654 | 3,168025 | 3 |
| 4 | 1,238825 | 3,505150 | 0,285294 | 4,342266 | 4 |
| 5 | 1,306960 | 4,270284 | 0,234176 | 5,581091 | 5 |
| 6 | 1,378843 | 4,995530 | 0,200179 | 6,888051 | 6 |
| 7 | 1,454679 | 5,682967 | 0,175964 | 8,266894 | 7 |
| 8 | 1,534687 | 6,334566 | 0,157864 | 9,721573 | 8 |
| 9 | 1,619094 | 6,952195 | 0,143839 | 11,256260 | 9 |
| 10 | 1,708144 | 7,537626 | 0,132668 | 12,875354 | 10 |
| 11 | 1,802092 | 8,092536 | 0,123571 | 14,583498 | 11 |
| 12 | 1,901207 | 8,618518 | 0,116029 | 16,385591 | 12 |
| 13 | 2,005774 | 9,117079 | 0,109684 | 18,286798 | 13 |
| 14 | 2,116091 | 9,589648 | 0,104279 | 20,292572 | 14 |
| 15 | 2,232476 | 10,037581 | 0,099626 | 22,408663 | 15 |
| 16 | 2,355263 | 10,462162 | 0,095583 | 24,641140 | 16 |
| 17 | 2,484802 | 10,864609 | 0,092042 | 26,996403 | 17 |
| 18 | 2,621466 | 11,246074 | 0,088920 | 29,481205 | 18 |
| 19 | 2,765647 | 11,607654 | 0,086150 | 32,102671 | 19 |
| 20 | 3,917757 | 11,950382 | 0,083679 | 34,868318 | 20 |
| 21 | 3,078234 | 12,275244 | 0,081465 | 37,786075 | 21 |
| 22 | 3,247537 | 12,583170 | 0,079471 | 40,864310 | 22 |
| 23 | 3,426152 | 12,875042 | 0,077670 | 44,111847 | 23 |
| 24 | 3,614590 | 13,151699 | 0,076036 | 47,537998 | 24 |
| 25 | 3,813392 | 13,413933 | 0,074549 | 51,152588 | 25 |
| 26 | 4,023129 | 13,662495 | 0,073193 | 54,965980 | 26 |
| 27 | 4,244401 | 13,898100 | 0,071952 | 58,989109 | 27 |
| 28 | 4,477843 | 14,121422 | 0,070814 | 63,233510 | 28 |
| 29 | 4,724124 | 14,333101 | 0,069769 | 67,711353 | 29 |
| 30 | 4,983951 | 14,533745 | 0,068805 | 72,435478 | 30 |
| 31 | 5,258069 | 14,723929 | 0,067917 | 77,419429 | 31 |
| 32 | 5,547262 | 14,904198 | 0,067095 | 82,677498 | 32 |
| 33 | 5,852362 | 15,075069 | 0,066335 | 88,224760 | 33 |
| 34 | 6,174242 | 15,237033 | 0,065630 | 94,077122 | 34 |
| 35 | 6,513825 | 15,390552 | 0,064975 | 100,251364 | 35 |
| 36 | 6,872085 | 15,536068 | 0,064366 | 106,765189 | 36 |
| 42 | 9,475525 | 16,262999 | 0,061489 | 154,100464 | 42 |
| 48 | 13,065260 | 16,790203 | 0,059559 | 219,368367 | 48 |
| 60 | 24,839770 | 17,449854 | 0,057307 | 433,450372 | 60 |
| 72 | 47,225558 | 17,796819 | 0,056190 | 840,464682 | 72 |
| 84 | 89,785583 | 17,979316 | 0,055619 | 1.614,283336 | 84 |
| 96 | 170,701023 | 18,075306 | 0,055324 | 3.085,473153 | 96 |
| 108 | 324,538064 | 18,125795 | 0,055170 | 5.882,510246 | 108 |
| 120 | 617,014196 | 18,152351 | 0,055089 | 11.200,258105 | 120 |

Taxa 5,5% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,447170 | 0,896339 | 1,347517 | 1,800713 | 2,713193 |



| $i = 6\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,060000 | 0,943396 | 1,060000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,123600 | 1,833393 | 0,545437 | 2,060000 | 2 |
| 3 | 1,191016 | 2,673012 | 0,374110 | 3,183600 | 3 |
| 4 | 1,262477 | 3,465106 | 0,288591 | 4,374616 | 4 |
| 5 | 1,338226 | 4,212364 | 0,237396 | 5,637093 | 5 |
| 6 | 1,418519 | 4,917324 | 0,203363 | 6,975319 | 6 |
| 7 | 1,503630 | 5,582381 | 0,179135 | 8,393838 | 7 |
| 8 | 1,593848 | 6,209794 | 0,161036 | 9,897468 | 8 |
| 9 | 1,689479 | 6,801692 | 0,147022 | 11,491316 | 9 |
| 10 | 1,790848 | 7,360087 | 0,135868 | 13,180795 | 10 |
| 11 | 1,898299 | 7,886875 | 0,126793 | 14,971643 | 11 |
| 12 | 2,012196 | 8,383844 | 0,119277 | 16,869941 | 12 |
| 13 | 2,132928 | 8,852683 | 0,112960 | 18,882138 | 13 |
| 14 | 2,260904 | 9,294984 | 0,107585 | 21,015066 | 14 |
| 15 | 2,396558 | 9,712249 | 0,102963 | 23,275970 | 15 |
| 16 | 2,540352 | 10,105895 | 0,098952 | 25,672528 | 16 |
| 17 | 2,692773 | 10,477260 | 0,095445 | 28,212880 | 17 |
| 18 | 2,854339 | 10,827603 | 0,092357 | 30,905653 | 18 |
| 19 | 3,025600 | 11,158117 | 0,089621 | 33,759992 | 19 |
| 20 | 3,207135 | 11,469921 | 0,087185 | 36,785591 | 20 |
| 21 | 3,399564 | 11,764077 | 0,085005 | 39,992727 | 21 |
| 22 | 3,603537 | 12,041582 | 0,083046 | 43,392290 | 22 |
| 23 | 3,819750 | 12,303379 | 0,081278 | 46,995828 | 23 |
| 24 | 4,048935 | 12,550358 | 0,079679 | 50,815577 | 24 |
| 25 | 4,291871 | 12,783356 | 0,078227 | 54,864512 | 25 |
| 26 | 4,549383 | 13,003166 | 0,076904 | 59,156383 | 26 |
| 27 | 4,822346 | 13,210534 | 0,075697 | 63,705766 | 27 |
| 28 | 5,111687 | 13,406164 | 0,074593 | 68,528112 | 28 |
| 29 | 5,418388 | 13,590721 | 0,073580 | 73,639799 | 29 |
| 30 | 5,743491 | 13,764831 | 0,072649 | 79,058186 | 30 |
| 31 | 6,088101 | 13,929086 | 0,071792 | 84,801678 | 31 |
| 32 | 6,453387 | 14,084043 | 0,071002 | 90,889778 | 32 |
| 33 | 6,840590 | 14,230230 | 0,070273 | 97,343165 | 33 |
| 34 | 7,251025 | 14,368141 | 0,069598 | 104,183755 | 34 |
| 35 | 7,686087 | 14,498246 | 0,068974 | 111,434780 | 35 |
| 36 | 8,147252 | 14,620987 | 0,068395 | 119,120867 | 36 |
| 42 | 11,557033 | 15,224543 | 0,065683 | 175,950545 | 42 |
| 48 | 16,393872 | 15,650027 | 0,063898 | 256,564529 | 48 |
| 60 | 32,987691 | 16,161428 | 0,061876 | 533,128181 | 60 |
| 72 | 66,377715 | 16,415578 | 0,060918 | 1.089,628586 | 72 |
| 84 | 133,565004 | 16,541883 | 0,060453 | 2.209,416737 | 84 |
| 96 | 268,759030 | 16,604653 | 0,060224 | 4.462,650505 | 96 |
| 108 | 540,795972 | 16,635848 | 0,060111 | 8.996,599542 | 108 |
| 120 | 1.088,187748 | 16,651351 | 0,060055 | 18.119,795797 | 120 |

Taxa 6% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,486755 | 0,975879 | 1,467385 | 1,961282 | 2,956301 |

| $i = 7\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\|i}$ | $(a_{\overline{n}\|i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\|i}$ | $n$ |
| 1 | 1,070000 | 0,934579 | 1,070000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,144900 | 1,808018 | 0,553092 | 2,070000 | 2 |
| 3 | 1,225043 | 2,624316 | 0,381052 | 3,214900 | 3 |
| 4 | 1,310796 | 3,387211 | 0,295228 | 4,439943 | 4 |
| 5 | 1,402552 | 4,100197 | 0,243891 | 5,750739 | 5 |
| 6 | 1,500730 | 4,766540 | 0,209796 | 7,153291 | 6 |
| 7 | 1,605781 | 5,389289 | 0,185553 | 8,654021 | 7 |
| 8 | 1,718186 | 5,971299 | 0,167468 | 10,259803 | 8 |
| 9 | 1,838459 | 6,515232 | 0,153486 | 11,977989 | 9 |
| 10 | 1,967151 | 7,023582 | 0,142378 | 13,816448 | 10 |
| 11 | 2,104852 | 7,498674 | 0,133357 | 15,783599 | 11 |
| 12 | 2,252192 | 7,942686 | 0,125902 | 17,888451 | 12 |
| 13 | 2,409845 | 8,357651 | 0,119651 | 20,140643 | 13 |
| 14 | 2,578534 | 8,745468 | 0,114345 | 22,550488 | 14 |
| 15 | 2,759032 | 9,107914 | 0,109795 | 25,129022 | 15 |
| 16 | 2,952164 | 9,446649 | 0,105858 | 27,888054 | 16 |
| 17 | 3,158815 | 9,763223 | 0,102425 | 30,840217 | 17 |
| 18 | 3,379932 | 10,059087 | 0,099413 | 33,999033 | 18 |
| 19 | 3,616528 | 10,335595 | 0,096753 | 37,378965 | 19 |
| 20 | 3,869684 | 10,594014 | 0,094393 | 40,995492 | 20 |
| 21 | 4,140562 | 10,835527 | 0,092289 | 44,865177 | 21 |
| 22 | 4,430402 | 11,061240 | 0,090406 | 49,005739 | 22 |
| 23 | 4,740530 | 11,272187 | 0,088714 | 53,436141 | 23 |
| 24 | 5,072367 | 11,469334 | 0,087189 | 58,176671 | 24 |
| 25 | 5,427433 | 11,653583 | 0,085811 | 63,249038 | 25 |
| 26 | 5,807353 | 11,825779 | 0,084561 | 68,676470 | 26 |
| 27 | 6,213868 | 11,986709 | 0,083426 | 74,483823 | 27 |
| 28 | 6,648838 | 12,137111 | 0,082392 | 80,697691 | 28 |
| 29 | 7,114257 | 12,277674 | 0,081449 | 87,346529 | 29 |
| 30 | 7,612255 | 12,409041 | 0,080586 | 94,460786 | 30 |
| 31 | 8,145113 | 12,531814 | 0,079797 | 102,073041 | 31 |
| 32 | 8,715271 | 12,646555 | 0,079073 | 110,218154 | 32 |
| 33 | 9,325340 | 12,753790 | 0,078408 | 118,933425 | 33 |
| 34 | 9,978114 | 12,854009 | 0,077797 | 128,258765 | 34 |
| 35 | 10,676582 | 12,947672 | 0,077234 | 138,236878 | 35 |
| 36 | 11,423942 | 13,035208 | 0,076715 | 148,913460 | 36 |
| 42 | 17,144257 | 13,452449 | 0,074336 | 230,632240 | 42 |
| 48 | 25,728907 | 13,730474 | 0,072831 | 353,270093 | 48 |
| 60 | 57,946427 | 14,039181 | 0,071229 | 813,520383 | 60 |
| 72 | 130,506455 | 14,176251 | 0,070541 | 1.850,092216 | 72 |
| 84 | 293,925541 | 14,237111 | 0,070239 | 4.184,650579 | 84 |
| 96 | 661,976630 | 14,264134 | 0,070106 | 9.442,523288 | 96 |
| 108 | 1.490,898199 | 14,276132 | 0,070047 | 21.284,259980 | 108 |
| 120 | 3.357,788383 | 14,281460 | 0,070021 | 47.954,119756 | 120 |

Taxa 7% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,565415 | 1,134026 | 1,705853 | 2,280912 | 3,440804 |



| $i = 8\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\|i}$ | $(a_{\overline{n}\|i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\|i}$ | $n$ |
| 1 | 1,080000 | 0,925926 | 1,080000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,166400 | 1,783265 | 0,560769 | 2,080000 | 2 |
| 3 | 1,259712 | 2,577097 | 0,388034 | 3,246400 | 3 |
| 4 | 1,360489 | 3,312127 | 0,301921 | 4,506112 | 4 |
| 5 | 1,469328 | 3,992710 | 0,250456 | 5,866601 | 5 |
| 6 | 1,586874 | 4,622880 | 0,216315 | 7,335929 | 6 |
| 7 | 1,713824 | 5,206370 | 0,192072 | 8,922803 | 7 |
| 8 | 1,850930 | 5,746639 | 0,174015 | 10,636628 | 8 |
| 9 | 1,999005 | 6,246888 | 0,160080 | 12,487558 | 9 |
| 10 | 2,158925 | 6,710081 | 0,149029 | 14,486562 | 10 |
| 11 | 2,331639 | 7,138964 | 0,140076 | 16,645487 | 11 |
| 12 | 2,518170 | 7,536078 | 0,132695 | 18,977126 | 12 |
| 13 | 2,719624 | 7,903776 | 0,126522 | 21,495297 | 13 |
| 14 | 2,937194 | 8,244237 | 0,121297 | 24,214920 | 14 |
| 15 | 3,172169 | 8,559479 | 0,116830 | 27,152114 | 15 |
| 16 | 3,425943 | 8,851369 | 0,112977 | 30,324283 | 16 |
| 17 | 3,700018 | 9,121638 | 0,109629 | 33,750226 | 17 |
| 18 | 3,996019 | 9,371887 | 0,106702 | 37,450244 | 18 |
| 19 | 4,315701 | 9,603599 | 0,104128 | 41,446263 | 19 |
| 20 | 4,660957 | 9,818147 | 0,101852 | 45,761964 | 20 |
| 21 | 5,033834 | 10,016803 | 0,099832 | 50,422921 | 21 |
| 22 | 5,436540 | 10,200744 | 0,098032 | 55,456755 | 22 |
| 23 | 5,871464 | 10,371059 | 0,096422 | 60,893296 | 23 |
| 24 | 6,341181 | 10,528758 | 0,094978 | 66,764759 | 24 |
| 25 | 6,848475 | 10,674776 | 0,093679 | 73,105940 | 25 |
| 26 | 7,396353 | 10,809978 | 0,092507 | 79,954415 | 26 |
| 27 | 7,988061 | 10,935165 | 0,091448 | 87,350768 | 27 |
| 28 | 8,627106 | 11,051078 | 0,090489 | 95,338830 | 28 |
| 29 | 9,317275 | 11,158406 | 0,089619 | 103,965936 | 29 |
| 30 | 10,062657 | 11,257783 | 0,088827 | 113,283211 | 30 |
| 31 | 10,867669 | 11,349799 | 0,088107 | 123,345868 | 31 |
| 32 | 11,737083 | 11,434999 | 0,087451 | 134,213537 | 32 |
| 33 | 12,676050 | 11,513888 | 0,086852 | 145,950620 | 33 |
| 34 | 13,690134 | 11,586934 | 0,086304 | 158,626670 | 34 |
| 35 | 14,785344 | 11,654568 | 0,085803 | 172,316804 | 35 |
| 36 | 15,968172 | 11,717193 | 0,085345 | 187,102148 | 36 |
| 42 | 25,339482 | 12,006699 | 0,083287 | 304,243523 | 42 |
| 48 | 40,210573 | 12,189136 | 0,082040 | 490,132164 | 48 |
| 60 | 101,257064 | 12,376552 | 0,080798 | 1.253,213296 | 60 |
| 72 | 254,982512 | 12,450977 | 0,080315 | 3.174,781398 | 72 |
| 84 | 642,089342 | 12,480532 | 0,080125 | 8.013,616770 | 84 |
| 96 | 1.616,890192 | 12,492269 | 0,080050 | 20.198,627405 | 96 |
| 108 | 4.071,604565 | 12,496930 | 0,080020 | 50.882,557060 | 108 |
| 120 | 10.252,992943 | 12,498781 | 0,080008 | 128.149,911781 | 120 |

Taxa 8% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,643403 | 1,290946 | 1,942655 | 2,598557 | 3,923048 |

## $i = 10\%$

| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\rceil i}$ | $(a_{\overline{n}\rceil i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\rceil i}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,100000 | 0,909091 | 1,100000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,210000 | 1,735537 | 0,576190 | 2,100000 | 2 |
| 3 | 1,331000 | 2,486852 | 0,402115 | 3,310000 | 3 |
| 4 | 1,464100 | 3,169865 | 0,315471 | 4,641000 | 4 |
| 5 | 1,610510 | 3,790787 | 0,263797 | 6,105100 | 5 |
| 6 | 1,771561 | 4,355261 | 0,229607 | 7,715610 | 6 |
| 7 | 1,948717 | 4,868419 | 0,205405 | 9,487171 | 7 |
| 8 | 2,143589 | 5,334926 | 0,187444 | 11,435888 | 8 |
| 9 | 2,357948 | 5,759024 | 0,173641 | 13,579477 | 9 |
| 10 | 2,593742 | 6,144567 | 0,162745 | 15,937425 | 10 |
| 11 | 2,853117 | 6,495061 | 0,153963 | 18,531167 | 11 |
| 12 | 3,138428 | 6,813692 | 0,146763 | 21,384284 | 12 |
| 13 | 3,452271 | 7,103356 | 0,140779 | 24,522712 | 13 |
| 14 | 3,797498 | 7,366687 | 0,135746 | 27,974983 | 14 |
| 15 | 4,177248 | 7,606080 | 0,131474 | 31,772482 | 15 |
| 16 | 4,594973 | 7,823709 | 0,127817 | 35,949730 | 16 |
| 17 | 5,054470 | 8,021553 | 0,124664 | 40,544703 | 17 |
| 18 | 5,559917 | 8,201412 | 0,121930 | 45,599173 | 18 |
| 19 | 6,115909 | 8,364920 | 0,119547 | 51,159090 | 19 |
| 20 | 6,727500 | 8,513564 | 0,117460 | 57,274999 | 20 |
| 21 | 7,400250 | 8,648694 | 0,115624 | 64,002499 | 21 |
| 22 | 8,140275 | 8,771540 | 0,114005 | 71,402749 | 22 |
| 23 | 8,954302 | 8,883218 | 0,112572 | 79,543024 | 23 |
| 24 | 9,849733 | 8,984744 | 0,111300 | 88,497327 | 24 |
| 25 | 10,834706 | 9,077040 | 0,110168 | 98,347059 | 25 |
| 26 | 11,918177 | 9,160945 | 0,109159 | 109,181765 | 26 |
| 27 | 13,109994 | 9,237223 | 0,108258 | 121,099942 | 27 |
| 28 | 14,420994 | 9,306567 | 0,107451 | 134,209936 | 28 |
| 29 | 15,863093 | 9,369606 | 0,106728 | 148,630930 | 29 |
| 30 | 17,449402 | 9,426914 | 0,106079 | 164,494023 | 30 |
| 31 | 19,194342 | 9,479013 | 0,105496 | 181,943425 | 31 |
| 32 | 21,113777 | 9,526376 | 0,104972 | 201,137767 | 32 |
| 33 | 23,225154 | 9,569432 | 0,104499 | 222,251544 | 33 |
| 34 | 25,547670 | 9,608575 | 0,104074 | 245,476699 | 34 |
| 35 | 28,102437 | 9,644159 | 0,103690 | 271,024368 | 35 |
| 36 | 30,912681 | 9,676508 | 0,103343 | 299,126805 | 36 |
| 42 | 54,763699 | 9,817397 | 0,101860 | 537,636992 | 42 |
| 48 | 97,017234 | 9,896926 | 0,101041 | 960,172338 | 48 |
| 60 | 304,481640 | 9,967157 | 0,100330 | 3.034,816395 | 60 |
| 72 | 955,593818 | 9,989535 | 0,100105 | 9.545,938177 | 72 |
| 84 | 2.999,062754 | 9,996666 | 0,100033 | 29.980,627542 | 84 |
| 96 | 9.412,343651 | 9,998938 | 0,100011 | 94.113,436513 | 96 |
| 108 | 29.539,966407 | 9,999661 | 0,100003 | 295.389,664066 | 108 |
| 120 | 92.709,068818 | 9,999892 | 0,100001 | 927.080,688178 | 120 |

Taxa 10% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 0,797414 | 1,601187 | 2,411369 | 3,228012 | 4,880885 |



## $i = 15\%$

| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\rceil i}$ | $(a_{\overline{n}\rceil i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\rceil i}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,150000 | 0,869565 | 1,150000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,322500 | 1,625709 | 0,615116 | 2,150000 | 2 |
| 3 | 1,520875 | 2,283225 | 0,437977 | 3,472500 | 3 |
| 4 | 1,749006 | 2,854978 | 0,350265 | 4,993375 | 4 |
| 5 | 2,011357 | 3,352155 | 0,298316 | 6,742381 | 5 |
| 6 | 2,313061 | 3,784483 | 0,264237 | 8,753738 | 6 |
| 7 | 2,660020 | 4,160420 | 0,240360 | 11,066799 | 7 |
| 8 | 3,059023 | 4,487322 | 0,222850 | 13,726819 | 8 |
| 9 | 3,517876 | 4,771584 | 0,209574 | 16,785842 | 9 |
| 10 | 4,045558 | 5,018769 | 0,199252 | 20,303718 | 10 |
| 11 | 4,652391 | 5,233712 | 0,191069 | 24,349276 | 11 |
| 12 | 5,350250 | 5,420619 | 0,184481 | 29,001667 | 12 |
| 13 | 6,152788 | 5,583147 | 0,179110 | 34,351917 | 13 |
| 14 | 7,075706 | 5,724476 | 0,174688 | 40,504705 | 14 |
| 15 | 8,137062 | 5,847370 | 0,171017 | 47,580411 | 15 |
| 16 | 9,357621 | 5,954235 | 0,167948 | 55,717472 | 16 |
| 17 | 10,761264 | 6,047161 | 0,165367 | 65,075093 | 17 |
| 18 | 12,375454 | 6,127966 | 0,163186 | 75,836357 | 18 |
| 19 | 14,231772 | 6,198231 | 0,161336 | 88,211811 | 19 |
| 20 | 16,366537 | 6,259331 | 0,159761 | 102,443583 | 20 |
| 21 | 18,821518 | 6,312462 | 0,158417 | 118,810120 | 21 |
| 22 | 21,644746 | 6,358663 | 0,157266 | 137,631638 | 22 |
| 23 | 24,891458 | 6,398837 | 0,156278 | 159,276384 | 23 |
| 24 | 28,625176 | 6,433771 | 0,155430 | 184,167842 | 24 |
| 25 | 32,918953 | 6,464149 | 0,154699 | 212,793017 | 25 |
| 26 | 37,856796 | 6,490564 | 0,154070 | 245,711970 | 26 |
| 27 | 43,535315 | 6,513534 | 0,153526 | 283,568766 | 27 |
| 28 | 50,065612 | 6,533508 | 0,153057 | 327,104080 | 28 |
| 29 | 57,575454 | 6,550877 | 0,152651 | 377,169693 | 29 |
| 30 | 66,211772 | 6,565980 | 0,152300 | 434,745146 | 30 |
| 31 | 76,143538 | 6,579113 | 0,151996 | 500,956918 | 31 |
| 32 | 87,565068 | 6,590533 | 0,151733 | 577,100456 | 32 |
| 33 | 100,699829 | 6,600463 | 0,151505 | 664,665524 | 33 |
| 34 | 115,804803 | 6,609099 | 0,151307 | 765,365353 | 34 |
| 35 | 133,175523 | 6,616607 | 0,151135 | 881,170156 | 35 |
| 36 | 153,151852 | 6,623137 | 0,150986 | 1.014,345680 | 36 |
| 42 | 354,249540 | 6,647848 | 0,150425 | 2.354,996933 | 42 |
| 48 | 819,400712 | 6,658531 | 0,150183 | 5.456,004746 | 48 |
| 60 | 4.383,998745 | 6,665146 | 0,150034 | 29.219,991638 | 60 |
| 72 | 23.455,489751 | 6,666382 | 0,150006 | 156.363,265009 | 72 |
| 84 | 125.492,736516 | 6,666614 | 0,150001 | 836.611,576774 | 84 |
| 96 | 671.417,526781 | 6,666657 | 0,150000 | 4.476.110,178543 | 96 |
| 108 | 3.592.251,693479 | 6,666665 | 0,150000 | 23.948.337,956529 | 108 |
| 120 | 19.219.445,001926 | 6,666666 | 0,150000 | 128.129.626,679505 | 120 |

Taxa 15% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 1,171492 | 2,356707 | 3,555808 | 4,768955 | 7,238053 |

| $i = 20\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,200000 | 0,833333 | 1,200000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,440000 | 1,527778 | 0,654545 | 2,200000 | 2 |
| 3 | 1,728000 | 2,106481 | 0,474725 | 3,640000 | 3 |
| 4 | 2,073600 | 2,588735 | 0,386289 | 5,368000 | 4 |
| 5 | 2,488320 | 2,990612 | 0,334380 | 7,441600 | 5 |
| 6 | 2,985984 | 3,325510 | 0,300706 | 9,929920 | 6 |
| 7 | 3,583181 | 3,604592 | 0,277424 | 12,915904 | 7 |
| 8 | 4,299817 | 3,837160 | 0,260609 | 16,499085 | 8 |
| 9 | 5,159780 | 4,030967 | 0,248079 | 20,798902 | 9 |
| 10 | 6,191736 | 4,192472 | 0,238523 | 25,958682 | 10 |
| 11 | 7,430084 | 4,327060 | 0,231104 | 32,150419 | 11 |
| 12 | 8,916100 | 4,439217 | 0,225265 | 39,580502 | 12 |
| 13 | 10,699321 | 4,532681 | 0,220620 | 48,496603 | 13 |
| 14 | 12,839185 | 4,610567 | 0,216893 | 59,195923 | 14 |
| 15 | 15,407022 | 4,675473 | 0,213882 | 72,035108 | 15 |
| 16 | 18,488426 | 4,729561 | 0,211436 | 87,442129 | 16 |
| 17 | 22,186111 | 4,774634 | 0,209440 | 105,930555 | 17 |
| 18 | 26,623333 | 4,812195 | 0,207805 | 128,116666 | 18 |
| 19 | 31,948000 | 4,843496 | 0,206462 | 154,740000 | 19 |
| 20 | 38,337600 | 4,869580 | 0,205357 | 186,688000 | 20 |
| 21 | 46,005120 | 4,891316 | 0,204444 | 225,025600 | 21 |
| 22 | 55,206144 | 4,909430 | 0,203690 | 271,030719 | 22 |
| 23 | 66,247373 | 4,924525 | 0,203065 | 326,236863 | 23 |
| 24 | 79,496847 | 4,937104 | 0,202548 | 392,484236 | 24 |
| 25 | 95,396217 | 4,947587 | 0,202119 | 471,981083 | 25 |
| 26 | 114,475460 | 4,956323 | 0,201762 | 567,377300 | 26 |
| 27 | 137,370552 | 4,963602 | 0,201467 | 681,852760 | 27 |
| 28 | 164,844662 | 4,969668 | 0,201221 | 819,223312 | 28 |
| 29 | 197,813595 | 4,974724 | 0,201016 | 984,067974 | 29 |
| 30 | 237,376314 | 4,978936 | 0,200846 | 1.181,881569 | 30 |
| 31 | 284,851577 | 4,982447 | 0,200705 | 1.419,257883 | 31 |
| 32 | 341,821892 | 4,985372 | 0,200587 | 1.704,109459 | 32 |
| 33 | 410,186270 | 4,987810 | 0,200489 | 2.045,931351 | 33 |
| 34 | 492,223524 | 4,989842 | 0,200407 | 2.456,117621 | 34 |
| 35 | 590,668229 | 4,991535 | 0,200339 | 2.948,341146 | 35 |
| 36 | 708,801875 | 4,992946 | 0,200283 | 3.539,009375 | 36 |

Taxa 20% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 1,530947 | 3,085332 | 4,663514 | 6,265857 | 9,544512 |



| $i = 25\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,250000 | 0,800000 | 1,250000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,562500 | 1,440000 | 0,694444 | 2,250000 | 2 |
| 3 | 1,953125 | 1,952000 | 0,512295 | 3,812500 | 3 |
| 4 | 2,441406 | 2,361600 | 0,423442 | 5,765625 | 4 |
| 5 | 3,051758 | 2,689280 | 0,371847 | 8,207031 | 5 |
| 6 | 3,814697 | 2,951424 | 0,338819 | 11,258789 | 6 |
| 7 | 4,768372 | 3,161139 | 0,316342 | 15,073486 | 7 |
| 8 | 5,960464 | 3,328911 | 0,300399 | 19,841858 | 8 |
| 9 | 7,450581 | 3,463129 | 0,288756 | 25,802322 | 9 |
| 10 | 9,313226 | 3,570503 | 0,280073 | 33,252903 | 10 |
| 11 | 11,641532 | 3,656403 | 0,273493 | 42,566129 | 11 |
| 12 | 14,551915 | 3,725122 | 0,268448 | 54,207661 | 12 |
| 13 | 18,189894 | 3,780098 | 0,264543 | 68,759576 | 13 |
| 14 | 22,737368 | 3,824078 | 0,261501 | 86,949470 | 14 |
| 15 | 28,421709 | 3,859263 | 0,259117 | 109,686838 | 15 |
| 16 | 35,527137 | 3,887410 | 0,257241 | 138,108547 | 16 |
| 17 | 44,408921 | 3,909928 | 0,255759 | 173,635684 | 17 |
| 18 | 55,511151 | 3,927942 | 0,254586 | 218,044605 | 18 |
| 19 | 69,388939 | 3,942354 | 0,253656 | 273,555756 | 19 |
| 20 | 86,736174 | 3,953883 | 0,252916 | 342,944695 | 20 |
| 21 | 108,420217 | 3,963107 | 0,252327 | 429,680869 | 21 |
| 22 | 135,525272 | 3,970485 | 0,251858 | 538,101086 | 22 |
| 23 | 169,406589 | 3,976388 | 0,251485 | 673,626358 | 23 |
| 24 | 211,758237 | 3,981111 | 0,251186 | 843,032947 | 24 |
| 25 | 264,697796 | 3,984888 | 0,250948 | 1.054,791184 | 25 |
| 26 | 330,872245 | 3,987911 | 0,250758 | 1.319,488980 | 26 |
| 27 | 413,590306 | 3,990329 | 0,250606 | 1.650,361225 | 27 |
| 28 | 516,987883 | 3,992263 | 0,250485 | 2.063,951531 | 28 |
| 29 | 646,234854 | 3,993810 | 0,250387 | 2.580,939414 | 29 |
| 30 | 807,793567 | 3,995048 | 0,250310 | 3.227,174268 | 30 |
| 31 | 1.009,741959 | 3,996039 | 0,250248 | 4.034,967835 | 31 |
| 32 | 1.262,177448 | 3,996831 | 0,250198 | 5.044,709793 | 32 |
| 33 | 1.577,721810 | 3,997465 | 0,250159 | 6.306,887242 | 33 |
| 34 | 1.972,152263 | 3,997972 | 0,250127 | 7.884,609052 | 34 |
| 35 | 2.465,190329 | 3,998377 | 0,250101 | 9.856,761315 | 35 |
| 36 | 3.081,487911 | 3,998702 | 0,250081 | 12.321,951644 | 36 |

Taxa 25% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 1,876927 | 3,789082 | 5,737126 | 7,721735 | 11,803399 |

| $i = 30\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,300000 | 0,769231 | 1,300000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,690000 | 1,360947 | 0,734783 | 2,300000 | 2 |
| 3 | 2,197000 | 1,816113 | 0,550627 | 3,990000 | 3 |
| 4 | 2,856100 | 2,166241 | 0,461629 | 6,187000 | 4 |
| 5 | 3,712930 | 2,435570 | 0,410582 | 9,043100 | 5 |
| 6 | 4,826809 | 2,642746 | 0,378394 | 12,756030 | 6 |
| 7 | 6,274852 | 2,802112 | 0,356874 | 17,582839 | 7 |
| 8 | 8,157307 | 2,924702 | 0,341915 | 23,857691 | 8 |
| 9 | 10,604499 | 3,019001 | 0,331235 | 32,014998 | 9 |
| 10 | 13,785849 | 3,091539 | 0,323463 | 42,619497 | 10 |
| 11 | 17,921604 | 3,147338 | 0,317729 | 56,405346 | 11 |
| 12 | 23,298085 | 3,190260 | 0,313454 | 74,326950 | 12 |
| 13 | 30,287511 | 3,223277 | 0,310243 | 97,625036 | 13 |
| 14 | 39,373764 | 3,248675 | 0,307818 | 127,912546 | 14 |
| 15 | 51,185893 | 3,268211 | 0,305978 | 167,286310 | 15 |
| 16 | 66,541661 | 3,283239 | 0,304577 | 218,472203 | 16 |
| 17 | 86,504159 | 3,294800 | 0,303509 | 285,013864 | 17 |
| 18 | 112,455407 | 3,303692 | 0,302692 | 371,518023 | 18 |
| 19 | 146,192029 | 3,310532 | 0,302066 | 483,973430 | 19 |
| 20 | 190,049638 | 3,315794 | 0,301587 | 630,165459 | 20 |
| 21 | 247,064529 | 3,319842 | 0,301219 | 820,215097 | 21 |
| 22 | 321,183888 | 3,322955 | 0,300937 | 1.067,279626 | 22 |
| 23 | 417,539054 | 3,325350 | 0,300720 | 1.388,463514 | 23 |
| 24 | 542,800770 | 3,327192 | 0,300554 | 1.806,002568 | 24 |
| 25 | 705,641001 | 3,328609 | 0,300426 | 2.348,803338 | 25 |
| 26 | 917,333302 | 3,329700 | 0,300327 | 3.054,444340 | 26 |
| 27 | 1.192,533293 | 3,330538 | 0,300252 | 3.971,777642 | 27 |
| 28 | 1.550,293280 | 3,331183 | 0,300194 | 5.164,310934 | 28 |
| 29 | 2.015,381264 | 3,331679 | 0,300149 | 6.714,604214 | 29 |
| 30 | 2.619,995644 | 3,332061 | 0,300115 | 8.729,985479 | 30 |
| 31 | 3.405,994337 | 3,332355 | 0,300088 | 11.349,981122 | 31 |
| 32 | 4.427,792638 | 3,332581 | 0,300068 | 14.755,975459 | 32 |
| 33 | 5.756,130429 | 3,332754 | 0,300052 | 19.183,768097 | 33 |
| 34 | 7.482,969558 | 3,332888 | 0,300040 | 24.939,898526 | 34 |
| 35 | 9.727,860425 | 3,332991 | 0,300031 | 32.422,868084 | 35 |
| 36 | 12.646,218553 | 3,333070 | 0,300024 | 42.150,728509 | 36 |

Taxa 30% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 2,210445 | 4,469751 | 6,778997 | 9,139288 | 14,017543 |



| $i = 40\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,400000 | 0,714286 | 1,400000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 1,960000 | 1,224490 | 0,816667 | 2,400000 | 2 |
| 3 | 2,744000 | 1,588921 | 0,629358 | 4,360000 | 3 |
| 4 | 3,841600 | 1,849229 | 0,540766 | 7,104000 | 4 |
| 5 | 5,378240 | 2,035164 | 0,491361 | 10,945600 | 5 |
| 6 | 7,529536 | 2,167974 | 0,461260 | 16,323840 | 6 |
| 7 | 10,541350 | 2,262839 | 0,441923 | 23,853376 | 7 |
| 8 | 14,757891 | 2,330599 | 0,429074 | 34,394726 | 8 |
| 9 | 20,661047 | 2,378999 | 0,420345 | 49,152617 | 9 |
| 10 | 28,925465 | 2,413571 | 0,414324 | 69,813664 | 10 |
| 11 | 40,495652 | 2,438265 | 0,410128 | 98,739129 | 11 |
| 12 | 56,693912 | 2,455904 | 0,407182 | 139,234781 | 12 |
| 13 | 79,371477 | 2,468503 | 0,405104 | 195,928693 | 13 |
| 14 | 111,120068 | 2,477502 | 0,403632 | 275,300171 | 14 |
| 15 | 155,568096 | 2,483930 | 0,402588 | 386,420239 | 15 |
| 16 | 217,795334 | 2,488521 | 0,401845 | 541,988334 | 16 |
| 17 | 304,913467 | 2,491801 | 0,401316 | 759,783668 | 17 |
| 18 | 426,878854 | 2,494144 | 0,400939 | 1.064,697136 | 18 |
| 19 | 597,630396 | 2,495817 | 0,400670 | 1.491,575990 | 19 |
| 20 | 836,682554 | 2,497012 | 0,400479 | 2.089,206386 | 20 |
| 21 | 1.171,355576 | 2,497866 | 0,400342 | 2.925,888940 | 21 |
| 22 | 1.639,897806 | 2,498476 | 0,400244 | 4.097,244516 | 22 |
| 23 | 2.295,856929 | 2,498911 | 0,400174 | 5.737,142322 | 23 |
| 24 | 3.214,199700 | 2,499222 | 0,400124 | 8.032,999251 | 24 |
| 25 | 4.499,879581 | 2,499444 | 0,400089 | 11.247,198951 | 25 |
| 26 | 6.299,831413 | 2,499603 | 0,400064 | 15.747,078532 | 26 |
| 27 | 8.819,763978 | 2,499717 | 0,400045 | 22.046,909945 | 27 |
| 28 | 12.347,669569 | 2,499798 | 0,400032 | 30.866,673923 | 28 |
| 29 | 17.286,737397 | 2,499855 | 0,400023 | 43.214,343492 | 29 |
| 30 | 24.201,432555 | 2,499897 | 0,400017 | 60.501,080889 | 30 |
| 31 | 33.882,005298 | 2,499926 | 0,400012 | 84.702,513244 | 31 |
| 32 | 47.434,807417 | 2,499947 | 0,400008 | 118.584,518542 | 32 |
| 33 | 66.408,730383 | 2,499962 | 0,400006 | 166.019,325959 | 33 |
| 34 | 92.972,222537 | 2,499973 | 0,400004 | 232.428,056342 | 34 |
| 35 | 130.161,111552 | 2,499981 | 0,400003 | 325.400,278879 | 35 |
| 36 | 182.225,556172 | 2,499986 | 0,400002 | 455.561,390430 | 36 |

Taxa 40% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 2,843616 | 5,768093 | 8,775731 | 11,868894 | 18,321596 |

| $i = 50\%$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $(1 + i)^n$ | $a_{\overline{n}\mid i}$ | $(a_{\overline{n}\mid i})^{-1}$ | $S_{\overline{n}\mid i}$ | $n$ |
| 1 | 1,500000 | 0,666667 | 1,500000 | 1,000000 | 1 |
| 2 | 2,250000 | 1,111111 | 0,900000 | 2,500000 | 2 |
| 3 | 3,375000 | 1,407407 | 0,710526 | 4,750000 | 3 |
| 4 | 5,062500 | 1,604938 | 0,623077 | 8,125000 | 4 |
| 5 | 7,593750 | 1,736626 | 0,575829 | 13,187500 | 5 |
| 6 | 11,390625 | 1,824417 | 0,548120 | 20,781250 | 6 |
| 7 | 17,085938 | 1,882945 | 0,531083 | 32,171875 | 7 |
| 8 | 25,628906 | 1,921963 | 0,520301 | 49,257813 | 8 |
| 9 | 38,443359 | 1,947975 | 0,513354 | 74,886719 | 9 |
| 10 | 57,665039 | 1,965317 | 0,508824 | 113,330078 | 10 |
| 11 | 86,497559 | 1,976878 | 0,505848 | 170,995117 | 11 |
| 12 | 129,746338 | 1,984585 | 0,503884 | 257,492676 | 12 |
| 13 | 194,619507 | 1,989724 | 0,502582 | 387,239014 | 13 |
| 14 | 291,929260 | 1,993149 | 0,501719 | 581,858521 | 14 |
| 15 | 437,893890 | 1,995433 | 0,501144 | 873,787781 | 15 |
| 16 | 656,840836 | 1,996955 | 0,500762 | 1.311,681671 | 16 |
| 17 | 985,261253 | 1,997970 | 0,500508 | 1.968,522507 | 17 |
| 18 | 1.477,891880 | 1,998647 | 0,500339 | 2.953,783760 | 18 |
| 19 | 2.216,837820 | 1,999098 | 0,500226 | 4.431,675640 | 19 |
| 20 | 3.325,256730 | 1,999399 | 0,500150 | 6.648,513460 | 20 |
| 21 | 4.987,885095 | 1,999599 | 0,500100 | 9.973,770190 | 21 |
| 22 | 7.481,827643 | 1,999733 | 0,500067 | 14.961,655285 | 22 |
| 23 | 11.222,741464 | 1,999822 | 0,500045 | 22.443,482928 | 23 |
| 24 | 16.834,112196 | 1,999881 | 0,500030 | 33.666,224392 | 24 |
| 25 | 25.251,168294 | 1,999921 | 0,500020 | 50.500,336588 | 25 |
| 26 | 37.876,752441 | 1,999947 | 0,500013 | 75.751,504882 | 26 |
| 27 | 56.815,128662 | 1,999965 | 0,500009 | 113.628,257323 | 27 |
| 28 | 85.222,692992 | 1,999977 | 0,500006 | 170.443,385985 | 28 |
| 29 | 127.834,039489 | 1,999984 | 0,500004 | 255.666,078977 | 29 |
| 30 | 191.751,059233 | 1,999990 | 0,500003 | 383.500,118466 | 30 |
| 31 | 287.626,588849 | 1,999993 | 0,500002 | 575.251,177699 | 31 |
| 32 | 431.439,883274 | 1,999995 | 0,500001 | 862.877,766548 | 32 |
| 33 | 647.159,824911 | 1,999997 | 0,500001 | 1.294.317,649822 | 33 |
| 34 | 970.739,737366 | 1,999998 | 0,500001 | 1.941.477,474733 | 34 |
| 35 | 1.456.109,606050 | 1,999999 | 0,500000 | 2.912.217,212099 | 35 |
| 36 | 2.184.164,409075 | 1,999999 | 0,500000 | 4.368.326,818149 | 36 |

Taxa 50% a.a.

Taxas Equivalentes

(%)

| Mensal | Bimestral | Trimestral | Quadrimestral | Semestral |
|---|---|---|---|---|
| 3,436608 | 6,991319 | 10,668192 | 14,471424 | 22,474487 |



# Bibliografia*


AYRES JR., Frank – *Matemática financeira*; traduzido por Gastão Quartin Pinto de Moura. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1971. 306 p.

CARVALHO, Thales Mello – *Matemática: para os colégios comerciais*. Edição do MEC, 1968, 438 p.

DEGARMO, E. Paul & CANADA, John R. – *Engineering economy*. 5. ed. New York, Macmillan Publishing Co., Inc., 1973. 573 p.

FARO, Clovis de – *Matemática financeira*. 5. ed. Rio de Janeiro, APEC. 1974. 440 p.

FRANCISCO, Walter de – *Matemática financeira*. 2. ed. São Paulo, Atlas, 1976. 205 p.

GRANT, Eugene L. & IRESON, W. Grant – *Principles of engineering economy*. 5. ed. New York, The Ronald Press Company, 1970. 640 p.

MORAES, Euclides M. de – *Matemática financeira*. 7. ed. Porto Alegre, Livraria Sulina, 1975. 453 p.

OLIVEIRA, Heládio de – *Tópicos de matemática financeira e aplicações*. São Paulo, Nobel, 1974, 325 p.

SIMONSEN, Mario H. – Correção monetária – a experiência brasileira. *Conjuntura Econômica*, Rio de Janeiro, 29 (7): 65-69, jul. 1975.


* Elaborado por Ana Maria T. Souza.

SOKOLNIKOFF, I. S. & REDHEFFER R. M. – *Mathematics of physics and modern engineering*. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958. 812 p.

Correção monetária – função e custos. *Conjuntura Econômica*, Rio de Janeiro, 29 (5): 107-109, maio 1975.

Correção monetária das O.R.T.N. – formas de cálculo. *Conjuntura Econômica*, Rio de Janeiro, 28 (12): 92-95, dez. 1974.

Inflação, correção monetária e índices de preços. *Conjuntura Econômica*, 29 (9): 91-94, set. 1975.

Os novos rumos da correção monetária. *Conjuntura Econômica*, Rio de Janeiro, 29 (11): 102-104, nov. 1975.

Uma correção mais moderada. *Gazeta Mercantil*, 20 maio 1976. p. 1-3.

Este livro foi impresso
(com filmes fornecidos pelo cliente)
na EDITORA SANTUÁRIO
Rua Pe. Claro Monteiro, 342
Telefone: 36-2140
12.570 — Aparecida-SP

*(Continuação da orelha anterior)*

No seu todo, a obra divide-se em quatro partes. A primeira cuida de **juros simples.** A segunda focaliza os **juros compostos.** A terceira abrange o estudo de **anuidades e empréstimos.** E a quarta versa sobre cálculos relacionados à inflação, como índices de correção monetária e diferenciação do conceito de taxa de juros nominal e real.

## NOTA SOBRE OS AUTORES

**Washington Franco Mathias** é graduado pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, modalidade Engenharia Mecânica da Produção. É ainda graduado em Economia, pela Faculdade de Economia e Administração da mesma Unidade, onde atualmente está concluindo o mestrado em Administração. É professor do Departamento de Administração da FEA-USP, da Faculdade de Comunicação Social Cásper Líbero e do Instituto de Organização Racional do Trabalho, de São Paulo.

**José Maria Gomes** é graduado em Economia pela Faculdade de Economia e Administração da Universidade de São Paulo, onde está concluindo o mestrado em Administração. É professor da Faculdade de Administração de Empresas de Santos, e do Instituto de Organização Racional do Trabalho, de São Paulo.

## APLICAÇÃO

Livro-texto para a disciplina MATEMÁTICA FINANCEIRA dos cursos de Administração, Economia e Ciências Contábeis. Obra de referência para as disciplinas Engenharia Econômica, Administração Financeira e Orçamentos, Elaboração e Avaliação de Projetos e Contabilidade de Custos. Obra de consulta para **Controllers** e outros profissionais da área financeira.